CHUYÊN ĐỀ GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Giáo viên: Nguyễn Văn Vĩnh, Gv Toán

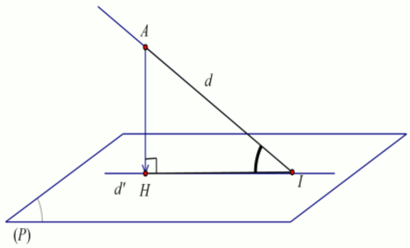
Ⓐ. Lý thuyết cơ bản

Ghi nhớ 1

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- ***Bước 1:*** *Tìm* $d \cap (P) = I$
- ***Bước 2:*** *Trên* d *lấy điểm A khác I. Tìm hình chiếu H của A lên* (P) *. (Thông thường ta chọn điểm* A *trên* d *và* A *thuộc đường thẳng* $\Delta \perp (P)$*, khi đó hình chiếu của* A *là giao điểm của* Δ *và* (P)*).*
- ***Bước 3:*** *suy ra* $\left(\widehat{d;(P)}\right) = \widehat{(AI;HI)} = \widehat{AIH}$
- ***Bước 4:*** *Tính* $\widehat{AIH}$ *(nếu đề bài yêu cầu tính góc)*

  Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác trong mục 2.2



Lưu ý:

- $d // a \Rightarrow \left(\widehat{a,(\alpha)}\right) = \left(\widehat{d,(\alpha)}\right)$
- $(\beta) // (\alpha) \Rightarrow \left(\widehat{a,(\alpha)}\right) = \left(\widehat{a,(\beta)}\right)$

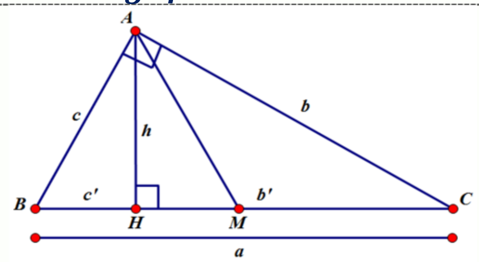
Ta có thể tính góc giữa đường thẳng d *và mp* (P) *bằng công thức:*

$\sin\widehat{d;(P)} = \dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}$. *Trong đó* $\vec{u}$ *là VTCP của* d *,* $\vec{n}$ *là véc tơ có giá vuông góc với* (P) *.*

✧ Kiến thức bổ sung: *Các hệ thức lượng trong tam giác*

Tam giác ABC vuông tại A

- $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}a.h = \dfrac{1}{2}b.c$
- $a^2 = b^2 + c^2$ *(định lý Pitago)*
- $b^2 = b'.a$
- $c^2 = c'.a$
- $h^2 = b'.c'$
- $a.h = b.c$
- $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$
- $\dfrac{b'}{c'} = \dfrac{b^2}{c^2}$
- $AM = \dfrac{1}{2}BC$



- $\sin B = \cos C = \dfrac{AC}{BC}$
- $\cos B = \sin C = \dfrac{AB}{BC}$
- $\tan B = \cot C = \dfrac{AC}{AB}$
- $\cot B = \cot C = \dfrac{AB}{AC}$

Ghi nhớ 2

Tam giác thường

- **Định lí côsin:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

- ***Tính cosin 1 góc:***

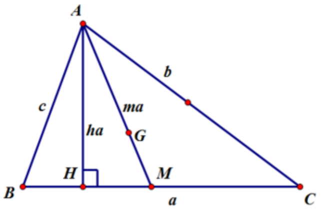
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

- **Độ dài trung tuyến:**

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$
$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$
$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

- **Định lí sin :**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



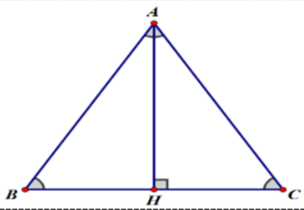
- **Diện tích tam giác**

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$S = \frac{abc}{4R}$$
$$S = pr\,;\, p = \frac{a+b+c}{2}$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- $AG = \dfrac{2}{3}AM$

Tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a

- $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

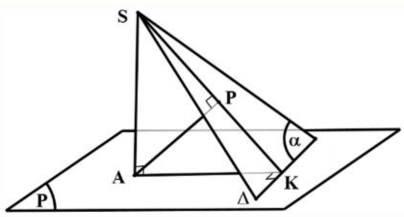


Ghi nhớ 3

❷. *Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng*

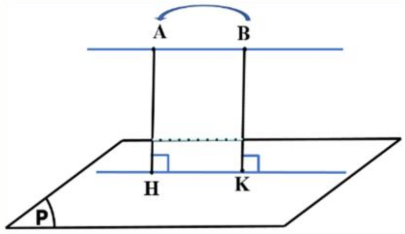
☑ Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α).

①. A là chân đường cao, tức là A º H.



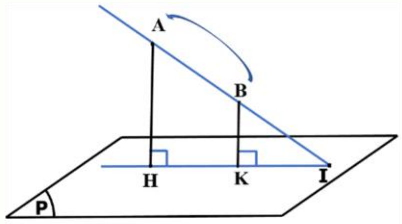
♦. Dựng $AK \perp \Delta \Rightarrow \Delta \perp (SAK) \Rightarrow (\alpha) \perp (SAK)$ và $(\alpha) \cap (SAK) = SK$.

②. Dựng đường thẳng $AB \parallel (P)$.



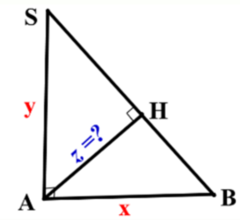
♦. Khi đó ta có: $d\left(B,(P)\right) = d\left(A,(P)\right)$.

③.Đường thẳng AB cắt (P) tại I:

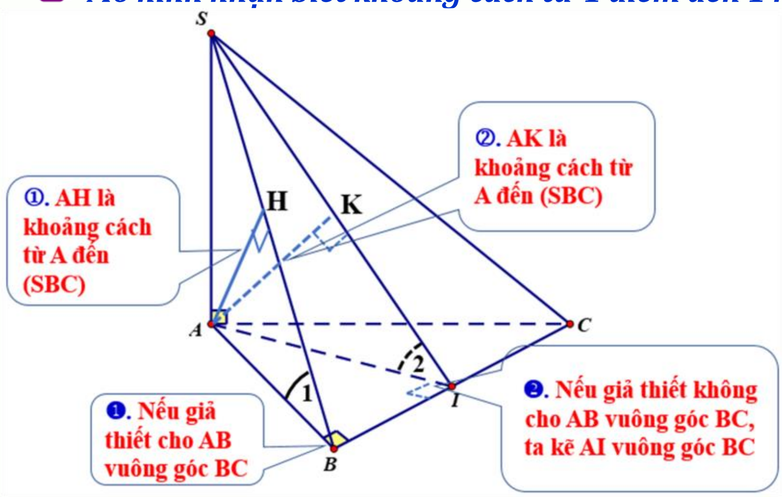


♦. Khi đó ta có: $\dfrac{d\left(B,(P)\right)}{d\left(A,(P)\right)} = \dfrac{BK}{AH} = \dfrac{BI}{AI}$

④. **Casio:** sử dụng công thức $AH = \sqrt{\dfrac{1}{1:x^2 + 1:y^2}}$



Mô hình nhận biết khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mp cơ bản



Ghi nhớ 4

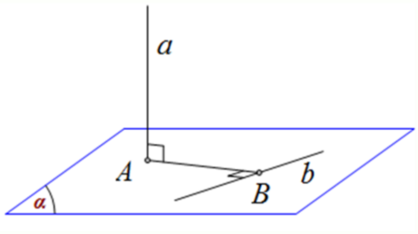
❸. *Khoảng cách giữa a và b chéo nhau:*

①. a vuông góc với mp(α) chứa b

♦ Tìm giao điểm A của a với mặt phẳng (α) chứa b.

♦ Từ A vẽ AB $\perp$ b tại B

♦ Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b

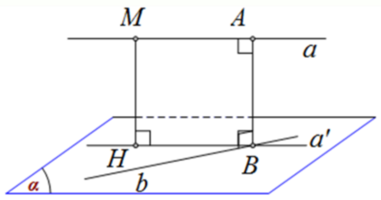


②. a vuông góc với mp(α) chứa b

♦ Tìm giao điểm A của a với mặt phẳng (α) chứa b.

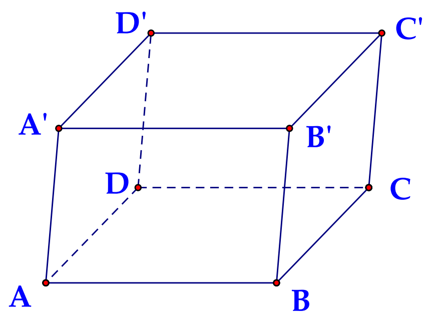
♦ Từ A vẽ AB $\perp$ b tại B

♦ Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b



Ⓑ. Bài tập rèn luyện

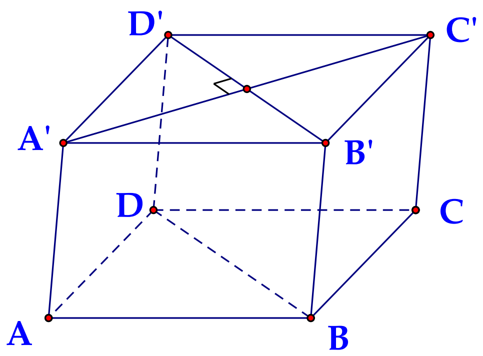
Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau . Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng



A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $BD // B'D'$ nên $(A'C', BD) = (A'C', B'D')$.

Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành có $A'B' = B'C'$ nên $A'B'C'D'$ là hình thoi nên $A'C' \perp B'D'$ hay $(A'C', B'D') = 90°$.

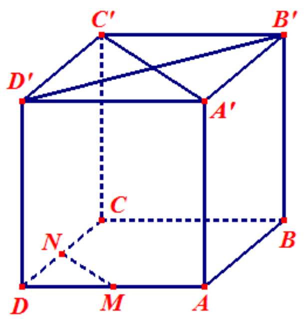
Vậy $(A'C', BD) = 90°$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, CD. Góc giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ là

A. 90^{o}. **B.** 45^{o}. **C.** 60^{o}. **D.** 30^{o}.

Lời giải

Chọn A



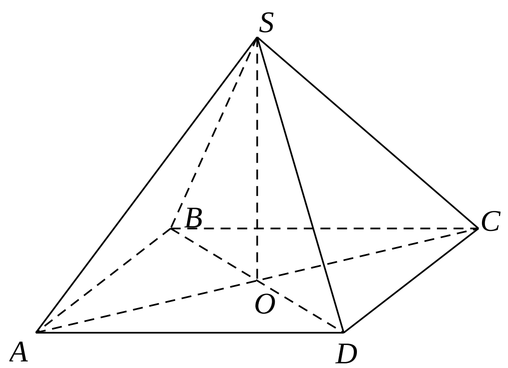
Ta có $MN // A'C'$ mà $A'C' \perp B'D' \Rightarrow MN \perp B'D'$.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Số đo góc giữa hai đường thẳng BC, SA bằng

A. $45°$. **B.** $120°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Vì $AD//BC$ nên góc giữa BC và SA là góc giữa AD và SA.

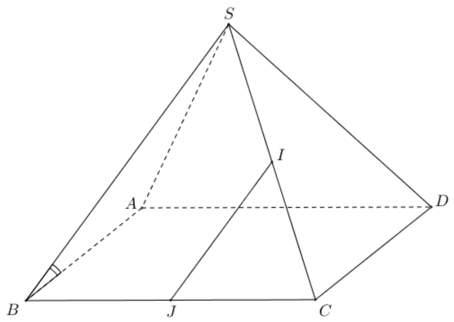
Hình chóp có tất cả các cạnh đều bằng a nên ΔSAD đều, suy ra $(AD, SA) = 60°$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $IJ // SB$ và $CD // AB$.

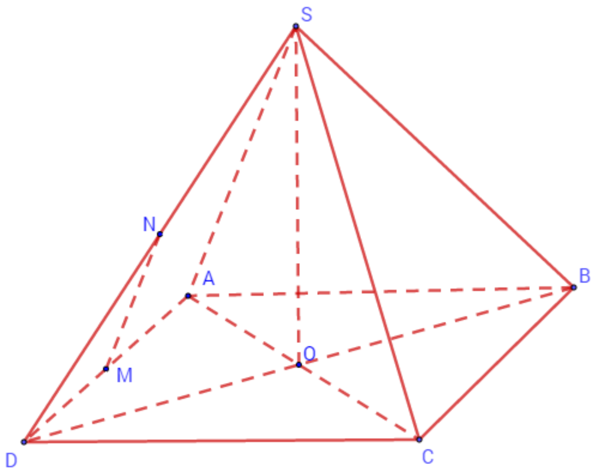
Suy ra $(IJ, CD) = (SB, AB) = SBA = 60°$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo góc (MN, SC) bằng:

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải

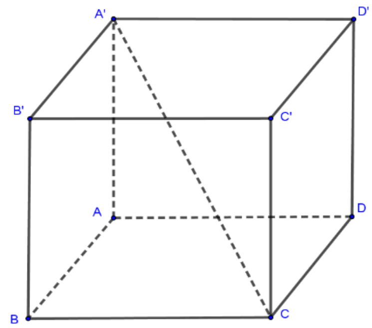
Chọn C



Vì M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD nên MN là đường trung bình của tam giác DSA. Suy ra MN song song với SA nên $(MN, SC) = (SA; SC)$.

Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = a\sqrt{2}$ vì AC là đường chéo của hình vuông cạnh a Khi đó tam giác SAC vuông cân tại S. Vậy $(SA; SC) = 90°$.

Câu 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A¢B¢C¢D¢$ có $AB = AD = 2$ và $AA¢ = 2\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $CA¢$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

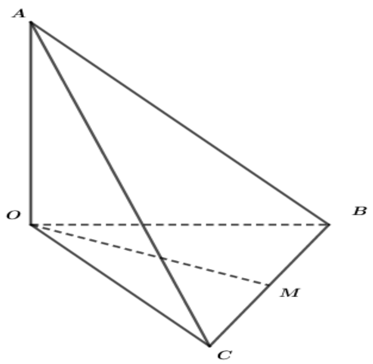
Lời giải

Chọn B

Ta có: $CA' \cap (ABCD) = C$, $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(CA',(ABCD))} = \widehat{A'CA}$.

Xét tam giác $AA'C$ vuông tại A ta có: $\tan \widehat{A'CA} = \dfrac{A'A}{AC} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{(CA',(ABCD))} = 45^\circ$.

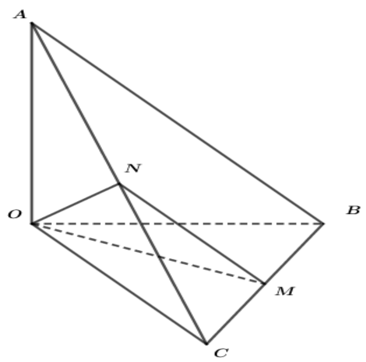
Câu 7: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC. Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



A. 45^0 **B.** 90^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Lời giải

Chọn D



Đặt $OA = a$ suy ra $OB = OC = a$ và $AB = BC = AC = a\sqrt{2}$

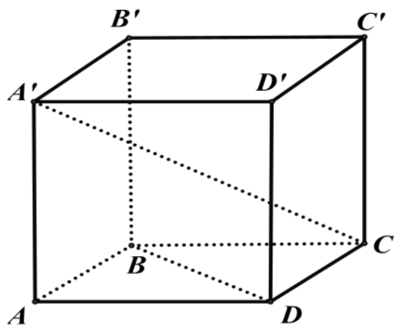
Gọi N là trung điểm AC ta có $MN // AB$ và $MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra góc $(OM, AB) = (OM, MN)$. Xét OMN

Trong tam giác OMN có $ON = OM = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên OMN là tam giác đều

Suy ra $OMN = 60^0$. Vậy $(OM, AB) = (OM, MN) = 60^0$

Câu 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Tính góc giữa $A'C$ và BD.



A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

Mặt khác $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp AA'$.

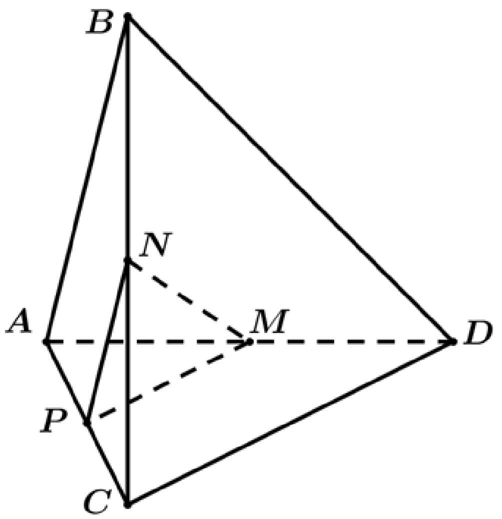
Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C$.

Do đó góc giữa $A'C$ và BD bằng $90°$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Biết $MN = a\sqrt{3}$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng.

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Lời giải



Gọi P là trung điểm AC, ta có $PM // CD$ và $PN // AB$, suy ra $(AB, CD) = (PM, PN)$.

Dễ thấy $PM = PN = a$.

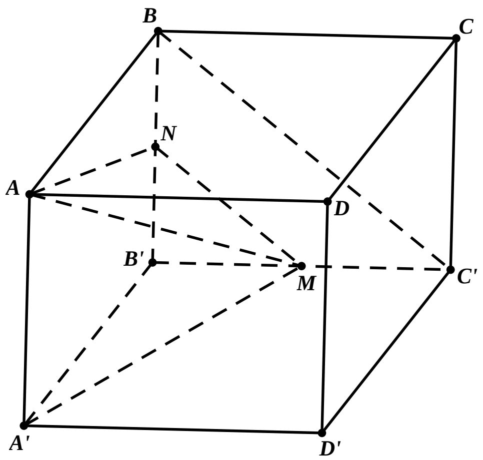
Xét ΔPMN ta có $\cos MPN = \dfrac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM.PN} = \dfrac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2.a.a} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow MPN = 120^0 \Rightarrow \left(AB, CD\right) = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải



Giả sử cạnh của hình lập phương là $a > 0$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng BB'. Khi đó, $MN // BC'$ nên $\left(AM, BC'\right) = \left(AM, MN\right)$.

Xét tam giác $A'B'M$ vuông tại B' ta có: $A'M = \sqrt{A'B'^2 + B'M^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A' ta có: $AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{3a}{2}$.

Có $AN = A'M = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $MN = \dfrac{BC'}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

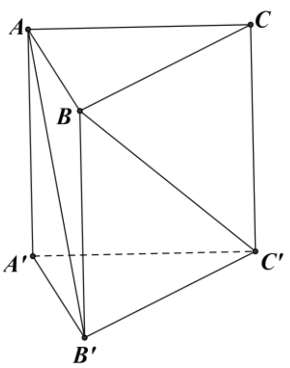
Trong tam giác AMN ta có:

$$\cos AMN = \frac{MA^2 + MN^2 - AN^2}{2.MA.MN} = \frac{\dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4} - \dfrac{5a^2}{4}}{2.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{6a^2}{4}.\frac{4}{6a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $AMN = 45°$.

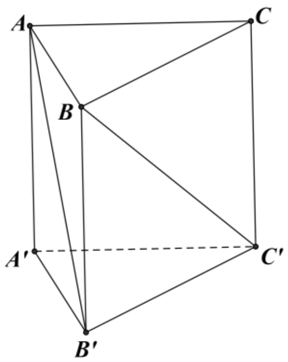
Vậy $\left(AM, BC'\right) = \left(AM, MN\right) = AMN = 45°$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. 60°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'} = -\dfrac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \dfrac{3a^2}{2}$.

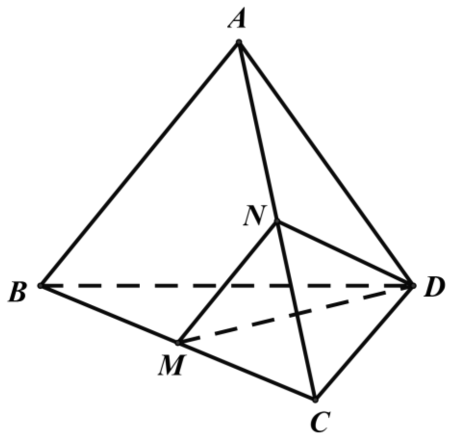
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}.a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(AB', BC'\right) = 60^\circ$.

Câu 12: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB, DM\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm của AC. Suy ra $MN // AB$

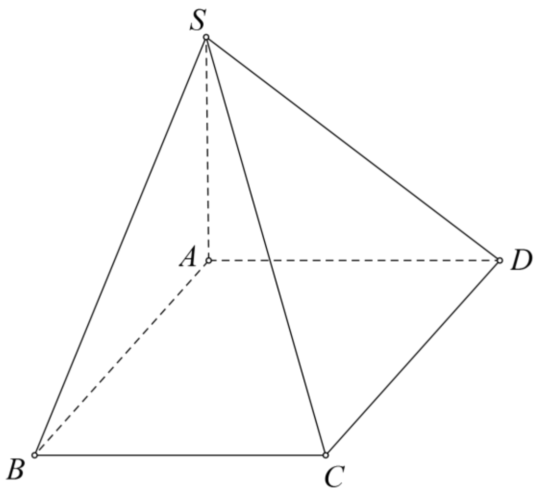
Do đó: $\cos\left(AB, DM\right) = \cos\left(MN, DM\right)$

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$, suy ra $MN = \dfrac{a}{2}$; $ND = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác MND ta có: $\cos NMD = \dfrac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2.MN.MD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$$\cos\left(AB,DM\right)=\cos NMD=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

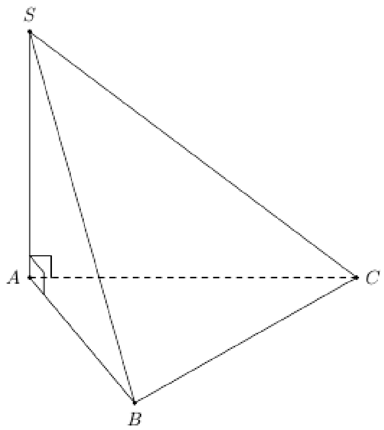
Lời giải

Chọn C

Ta có $SA\perp(ABCD)$ nên ta có $(SC,(ABCD))=SCA$

$$\tan SCA=\frac{SA}{AC}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a.\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow SCA=30^0$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$, $SA=a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng



A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left.\begin{array}{l}SB\cap\left(ABC\right)=B\\SA\perp\left(ABC\right)\end{array}\right\}\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$

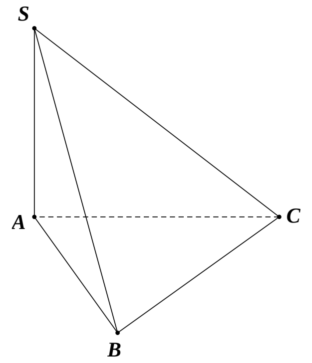
$$\Rightarrow\left(SB,\left(ABC\right)\right)=SBA$$

Do tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = (2a)^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 4a^2 \Leftrightarrow AB = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông SAB vuông tại A, có $SA = AB = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 45°$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{15}a$.



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C

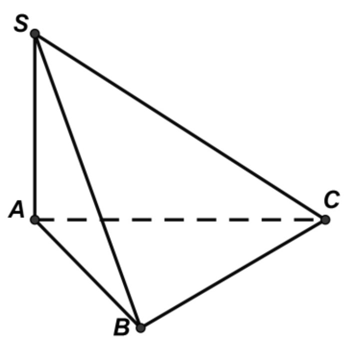
Do SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng đáy. Từ đó suy ra: $\left(\widehat{SC;(ABC)}\right) = \left(\widehat{SC;AC}\right) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$.

Trong tam giác SAC vuông tại A có: $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{15}a}{\sqrt{5}a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$.

Vậy $\left(\widehat{SC;(ABC)}\right) = 60°$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = \sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$.



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Lời giải

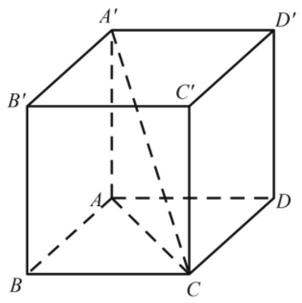
Chọn C

Ta có: $(SC;(ABC)) = \widehat{SCA}$

$\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{\sqrt{(3a)^2 + (\sqrt{3}a)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0.$

Vậy $(SC;(ABC)) = 30^o$.

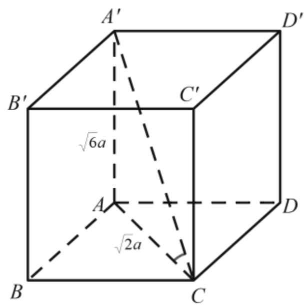
Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = BC = a, AA' = \sqrt{6}a$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:



A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



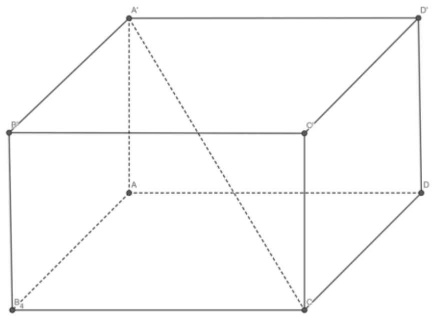
Ta có góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa $A'C$ và AC và bằng góc $A'CA$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $\Delta A'CA$ có $\tan A'CA = \dfrac{A'A}{AC} = \dfrac{\sqrt{6}a}{\sqrt{2}a} = \sqrt{3} \Rightarrow A'CA = 60°$.

Vậy góc $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ và bằng $60°$.

Câu 18: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2\sqrt{2}a$, $AA' = \sqrt{3}a$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy: hình chiếu của $A'C$ xuống $(ABCD)$ là AC do đó

$(A'C;(ABCD)) = (A'C;AC) = A'CA$.

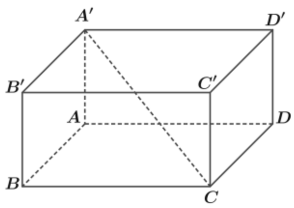
Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3a$.

Xét tam giác $A'CA$ vuông tại C ta có:

$$\tan(A'CA) = \frac{A'A}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow A'CA = 30^{\circ}$.

Câu 19: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật, có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ nên

$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$$

Ta có $(A'C;(ABCD)) = (A'C;CA) = A'CA$

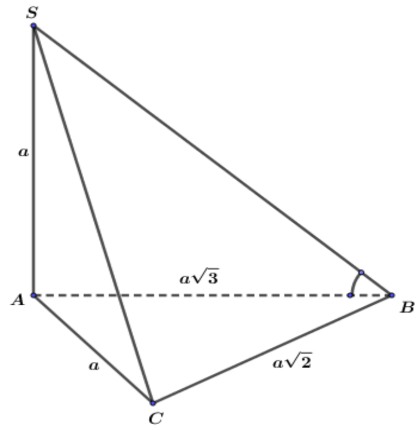
Do tam giác $A'AC$ vuông tại A nên $\tan A'AC = \frac{AA'}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A'AC = 30^{\circ}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 60° **B.** 90° **C.** 30° **D.** 45°

Lời giải

Chọn C



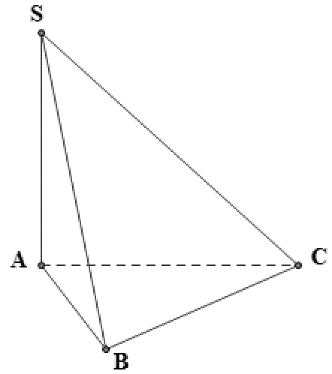
Có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \left(SB, (ABC)\right) = \left(SB, AB\right) = SBA$.

Mặt khác có ΔABC vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

Khi đó $\tan SBA = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\left(SB, (ABC)\right) = 30^\circ$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$ và $BC = \sqrt{3}a$.



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C

Vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng SCA.

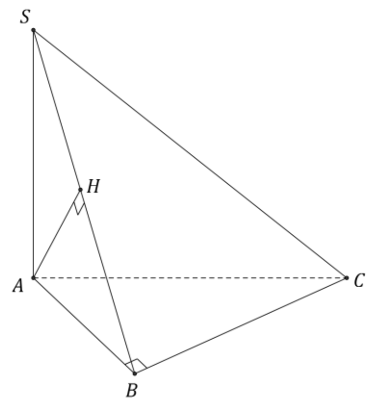
Mà $\tan SCA = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = 1$.

Vậy $SCA = 45^\circ$.

Câu 22: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải



Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.

Vì $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $SB \perp AH$ do cách dựng nên $AH \perp (SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc ASH hay góc ASB.

Tam giác ABC vuông ở B $\Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$

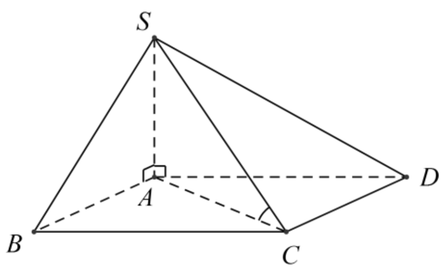
Tam giác SAB vuông ở A $\Rightarrow \sin ASB = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ASB = 30^\circ$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45° **B.** 60° **C.** 30° **D.** 90°

Lời giải

Chọn A



Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng góc SCA.

Ta có $SA = \sqrt{2}a$, $AC = \sqrt{2}a$ $\Rightarrow \tan SCA = \dfrac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow SCA = 45^\circ$.

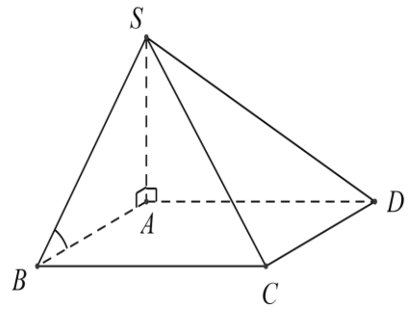
Vậy góc giữa đường thẳng SC và và mặt phẳng đáy bằng bằng $45°$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$

Lời giải

Chọn B

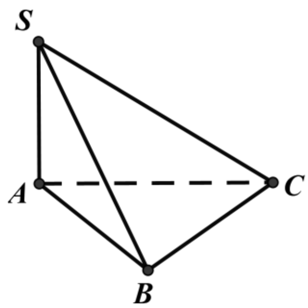


Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SBA}$.

Ta có $\cos \widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và và mặt phẳng đáy bằng bằng $60°$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng:



A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC).

Do đó $(SC,(ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$.

Do đó tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^0$.

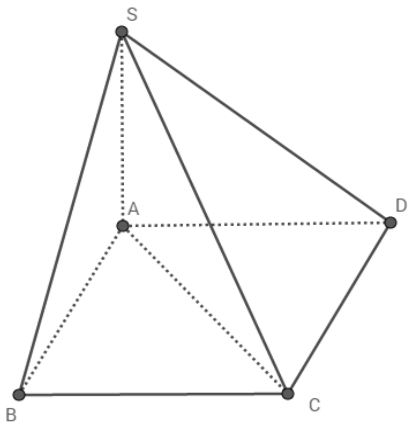
Vậy $(SC,(ABC)) = 45^0$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA\perp(ABCD)$. Biết $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $75°$ **D.** $45°$

Lời giải

Chọn A

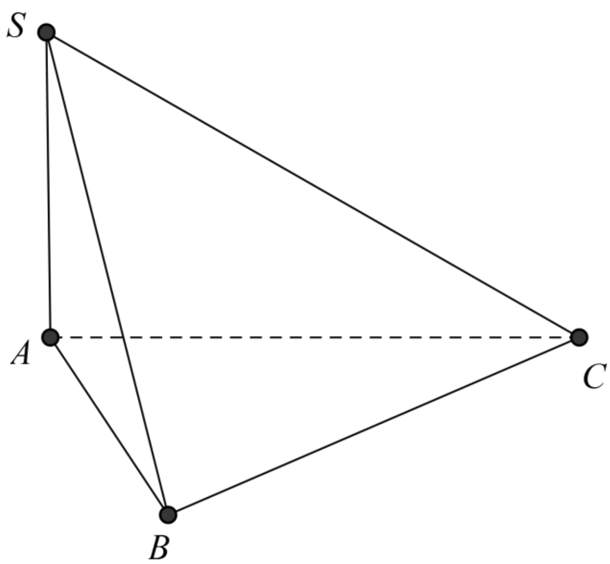


Ta có $AC=a\sqrt{2}$

Vì AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC

Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $\tan SCA=\dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $SCA=30^0$

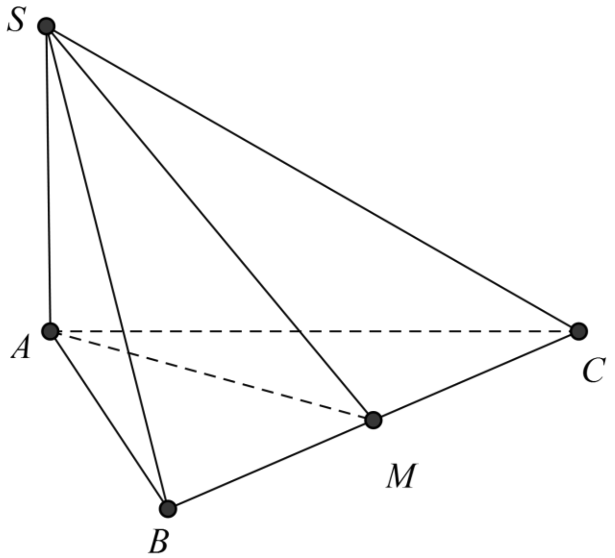
Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, tam giác ABC đều cạnh bằng a. Góc tạo bởi giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng



A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC.

ΔABC đều cạnh a nên $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ Hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) là AM.

Suy ra $SM \perp BC$.

Có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \subset (ABC),\ AM \perp BC \\ SM \subset (SBC),\ SM \perp BC \end{cases}$. Do đó góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa SM và AM, hay là góc SMA.

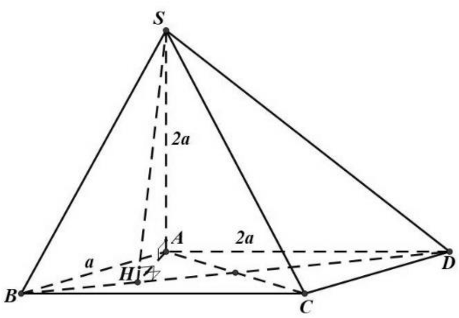
Xét tam giác SAM vuông tại A có $\tan SMA = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1 \Rightarrow SMA = 45^0$.

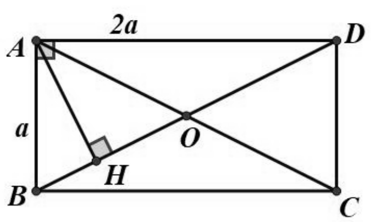
Vậy góc cần tìm là 45^0.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = SA = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải





Ta có:

$(SBD) \cap (ABCD) = BD$.

Hạ $AH \perp BD$ tại H.

Ta có $\left.\begin{matrix} AH \perp BD \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp SH$.

$\Rightarrow \left((SBD);(ABCD)\right) = \left(HA, HS\right)$.

ΔSAH vuông tại A $\Rightarrow SHA < 90^0 \Rightarrow \left(HA, HS\right) = SHA$

$\tan SHA = \dfrac{SA}{AH}$.

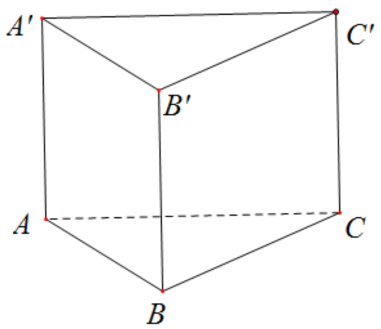
Xét ΔABD vuông tại A có:

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

$\Leftrightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\tan SHA = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{2a}{\frac{2a\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5}$.

Câu 29: **ĐTK2022** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = 4$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ là:



A. $2\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} CB \perp BA \\ CB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABB'A') \Rightarrow d\left(C,(ABB'A')\right) = CB.$

Mặt khác tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow CB = BA = 4.$

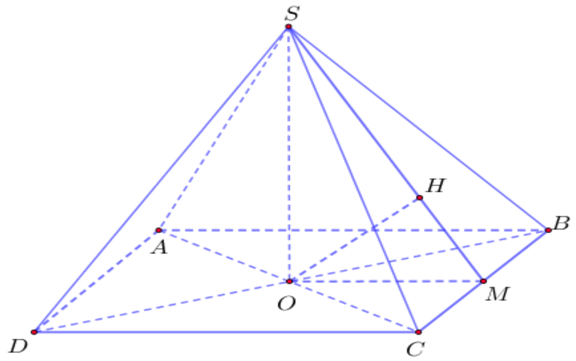
Vậy $d\left(C,(ABB'A')\right) = CB = 4$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $BAD = 60^{\circ}$, cạnh SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách từ O đến (SBC) là

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{18}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{45}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{52}}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Vẽ $OM \perp BC$ tại M thì $(SMO) \perp BC \Rightarrow (SMO) \perp (SBC)$, vẽ $OH \perp SM$ tại H $\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(O,(SBC)\right) = OH$

Ta có $AC = a\sqrt{3}$, $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OB = \dfrac{a}{2}$, $OM.BC = OB.OC \Rightarrow OM = \dfrac{OB.OC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

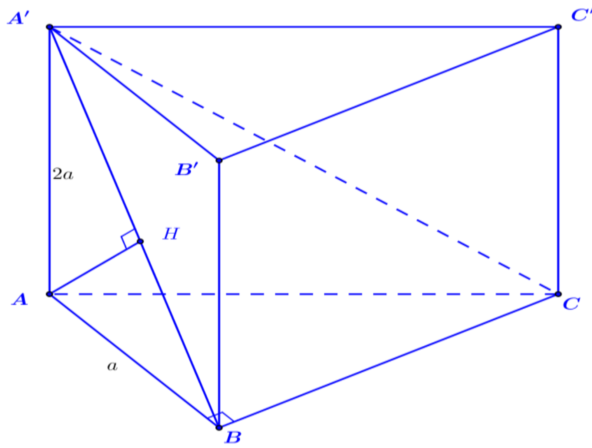
$$OH = \frac{SO.MO}{\sqrt{SO^2 + MO^2}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

Câu 31: Một hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, AA' = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ là:

A. $2a\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(A'AB)$ kẻ $AH \perp A'B$ (1).

Ta có

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ vu«ng t¹i } B \Rightarrow AB \perp BC \\ ABC.AB'C' \text{ lµ l¨ng trô ®øng} \Rightarrow AA' \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (A'AB) \Rightarrow BC \perp AH \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (A'AB) \Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right) = AH$.

Trong $\Delta A'AB$ vuông tại A có đường cao AH ta có

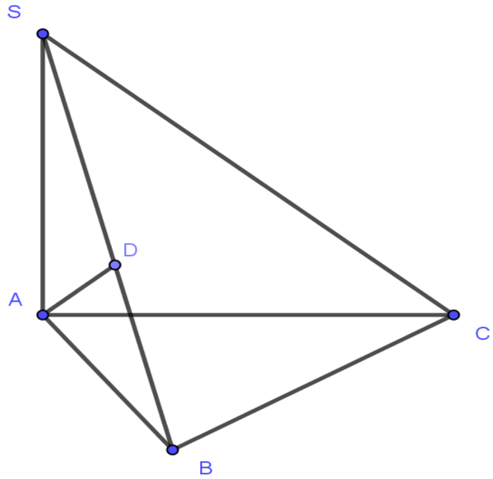
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} \Rightarrow AH = \frac{AB.AA'}{\sqrt{AB^2 + AA'^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có M , $SA = a\sqrt{3}$ và ΔABC vuông tại B có cạnh $BC = a$, $AC = a\sqrt{5}$. Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBC).

A. $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là hình chiếu của A lên SB.

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

$\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AD.$.

$\begin{cases} AD \perp BC \\ AD \perp SB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SBC) \Rightarrow d_{(A,(SBC))} = AD.$

Lại có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$

Xét ΔSAB vuông tại A có AH là đường cao nên ta có:

$$AH = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}.2a}{\sqrt{3a^2 + 4a^2}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}a.$$

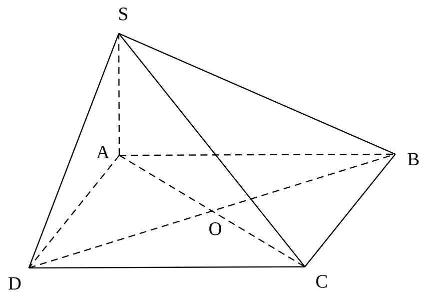
Vậy khoảng cách từ A đến (SBC) là $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA^ $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp(SAC).

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BO \perp AC$. (1)

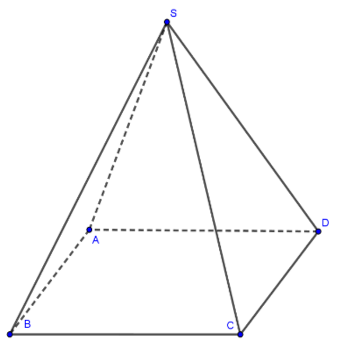
Ta lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$. (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow BO \perp (SAC)$.

Mà $BO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d\left(B;(SAC)\right) = BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

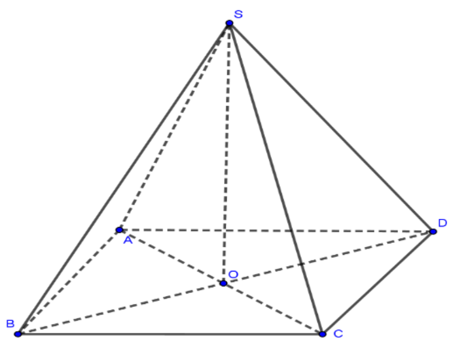
Câu 34: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 2 và độ dài cạnh bên bằng 3. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\sqrt{7}$. **B.** 1. **C.** 7. **D.** $\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

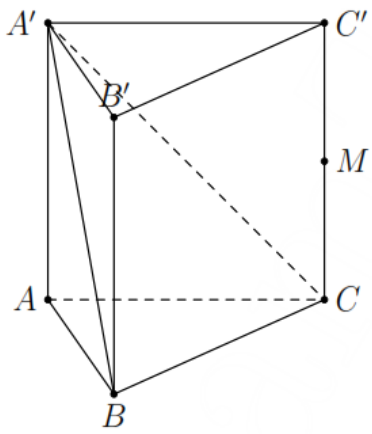
$\Rightarrow d\left(S;(ABCD)\right) = SO$.

Ta có: $AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow OC = \sqrt{2}$.

Xét tam giác SOC vuông tại O ta có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{3^2 - 2} = \sqrt{7}$

$\Rightarrow d\left(S;(ABCD)\right) = \sqrt{7}$.

Câu 35: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm của CC'. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

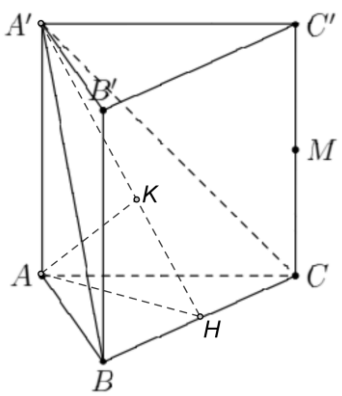


A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$. **D.** $\frac{\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BC và $A'H$.

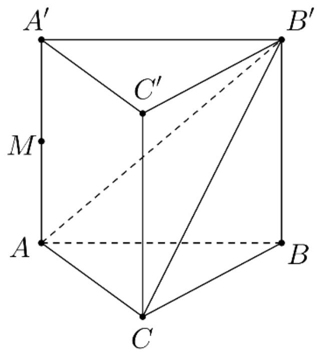


Ta có $d\left(M,\left(A'BC\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(C',\left(A'BC\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = \frac{1}{2}AK$.

Mà $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AA' = 2a$ nên $AK = \frac{AH.AA'}{\sqrt{AH^2 + AA'^2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Vậy $d\left(M;\left(A'BC\right)\right) = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.

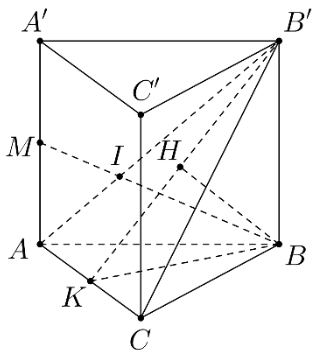
Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A=2a$. Gọi M là trung điểm của $A'A$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{57}a}{19}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $I = BM \cap AB'$ và K là trung điểm AC.

Ta có $\frac{d\left(M,\left(AB'C\right)\right)}{d\left(B,\left(AB'C\right)\right)} = \frac{MI}{BI} = \frac{MA}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow d\left(M,\left(AB'C\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(B,\left(AB'C\right)\right) = \frac{BH}{2}$.

Xét tam giác $BB'K$ có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

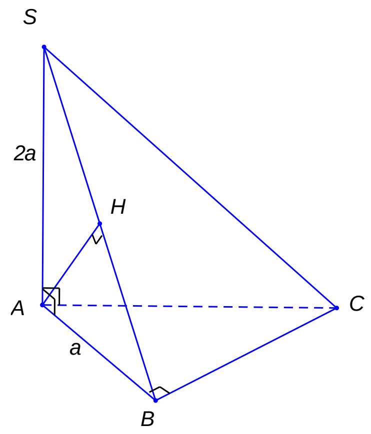
Vậy $d\left(M,\left(AB'C\right)\right) = \frac{BH}{2} = \frac{\sqrt{57}a}{19}$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

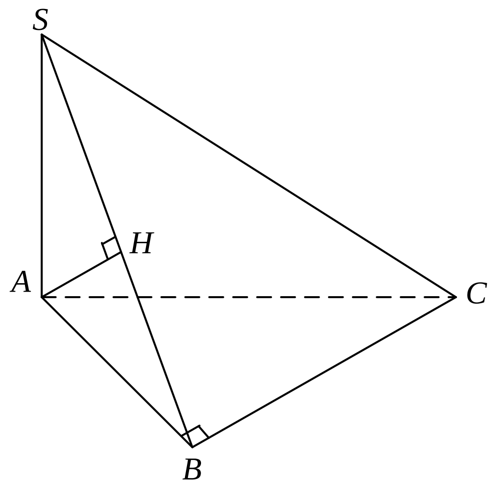
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{4a^2}{5} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{a}{2}$ **D.** a

Lời giải

Chọn B

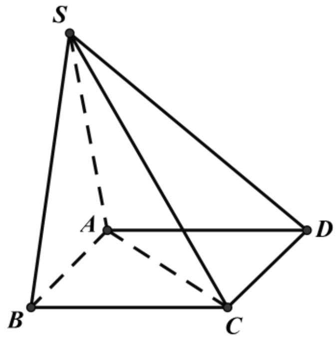


Kẻ $AH \perp SB$ trong mặt phẳng (SBC)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = AH = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

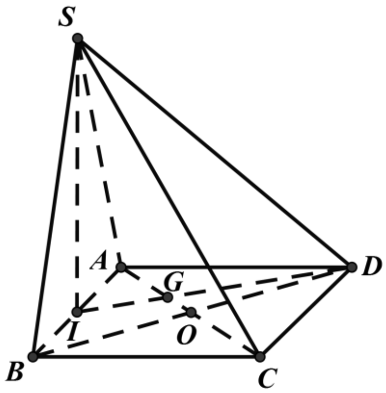
Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy . Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng

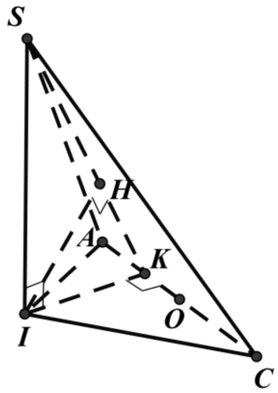


A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.　　**B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.　　**C.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.　　**D.** $\frac{a\sqrt{21}}{28}$.

Lời giải

Chọn B





* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD, I là trung điểm của AB ta có $SI \perp (ABCD)$ và $\frac{d(D;(SAC))}{d(I;(SAC))} = \frac{DG}{IG} = 2 \Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC))$.

* Gọi K là trung điểm của AO, H là hình chiếu của I lên SK ta có $IK \perp AC;\ IH \perp (SAC)$

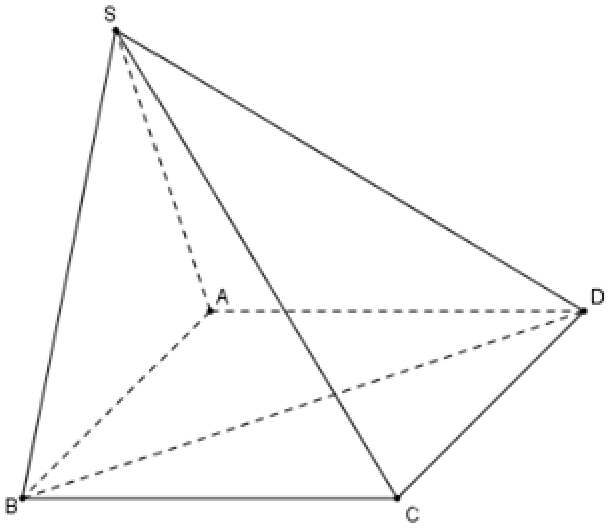
$\Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC)) = 2.IH$

* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có: $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IK = \frac{BO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{2a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

$\Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC)) = 2.IH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

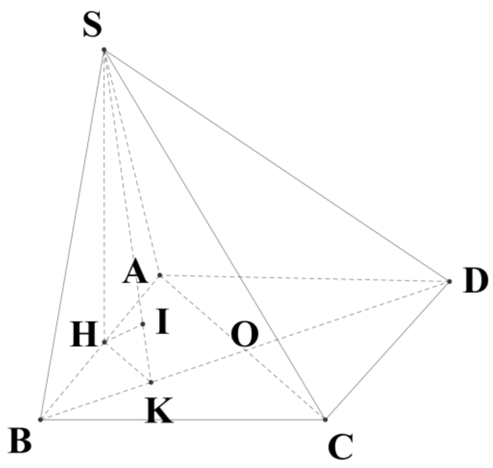
Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó, $SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $AC \perp BD$. Kẻ $HK \perp BD$ tại K (K là trung điểm BO).

Kẻ $HI \perp SH$ tại I. Khi đó: $d\left(A,(SBD)\right) = 2d\left(H,(SBD)\right) = 2HI$.

Xét tam giác SHK, có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Khi đó: $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

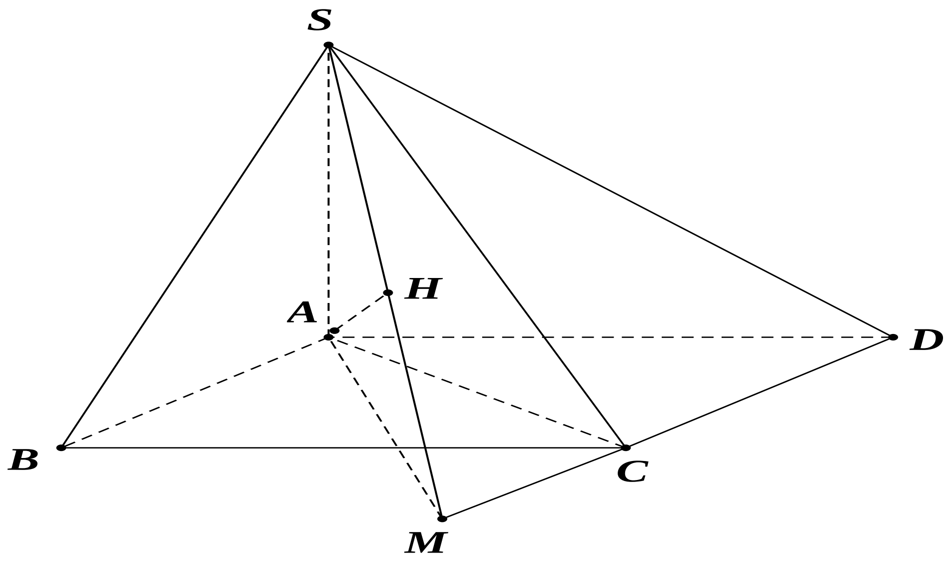
Suy ra: $d\left(A,(SBD)\right) = 2HI = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BAD = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách tứ B đến (SCD) bằng?

A. $\frac{\sqrt{21}a}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}a}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}a}{7}$.

Lời giải

Chọn C



CÁCH 1:

Ta có $AB//CD \Rightarrow d\left(B;(SCD)\right)=d\left(\text{A};(SCD)\right)$.

Kẽ $MA\perp CD(M\in CD)$,kẽ $AH\perp SM\Rightarrow SH\perp(SCD)\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=SH$.

$SA=a$; $AM=\dfrac{2S_{ACD}}{CD}=\dfrac{S_{ABCD}}{CD}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AM^2}\Rightarrow SM=\dfrac{\sqrt{21}}{7}a$

CÁCH 2: Ta có $AB//CD\Rightarrow d\left(B;(SCD)\right)=d\left(\text{A};(SCD)\right)=\dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{SCD}}=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{2S_{SCD}}=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 42: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải:

Chọn B

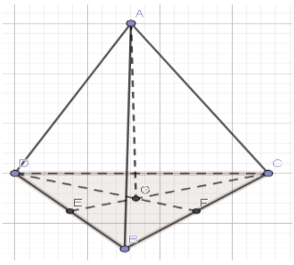
Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm của BD,CD và trọng tâm tam giác BCD

Tam giác BCD đều nên suy ra $CE=\dfrac{BC\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$CG=\dfrac{2}{3}CE=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Tam giác ACG vuông tại G nên ta có $AG^2=AC^2-CG^2=a^2-\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{2a^2}{3}\Rightarrow AG=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $d\left(A,(BCD)\right)=AG=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

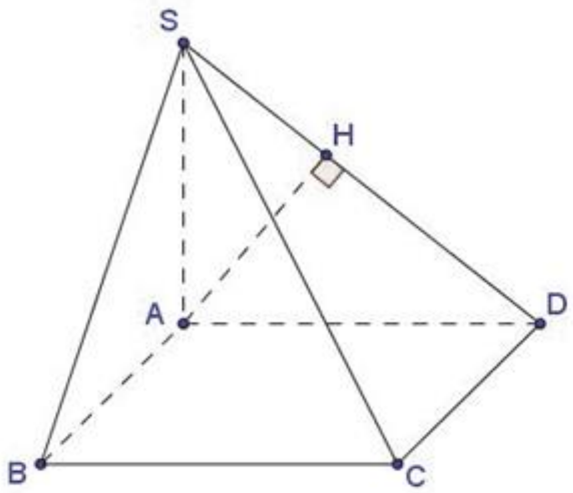


Câu 43: Cho hình chóp $SABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$ **B.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A lên SD ta chứng minh được $AH \perp (SCD)$

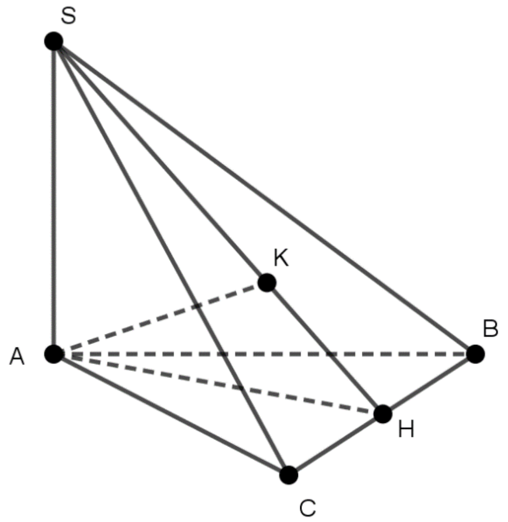
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Câu 44: Cho hình chop $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$ **C.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{19}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{38}}{19}$

Lời giải

Chọn B



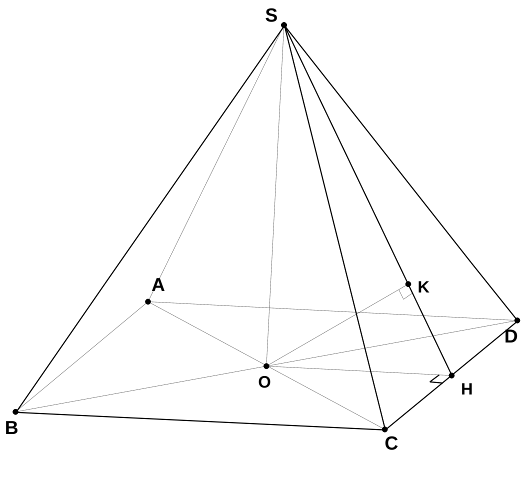
Ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{19}{12a^2}$.

Suy ra $AK = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ hay $d(A,(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 45: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Vẽ OH vuông góc với CD tại H thì H là trung điểm CD, $OH = \dfrac{a}{2}$.

Dễ thấy $CD \perp (SOH) \Rightarrow (SCD) \perp (SOH)$ nên kẻ OK vuông góc với SH tại K thì $OK \perp (SCD). \Rightarrow d[O,(SCD)] = OK$.

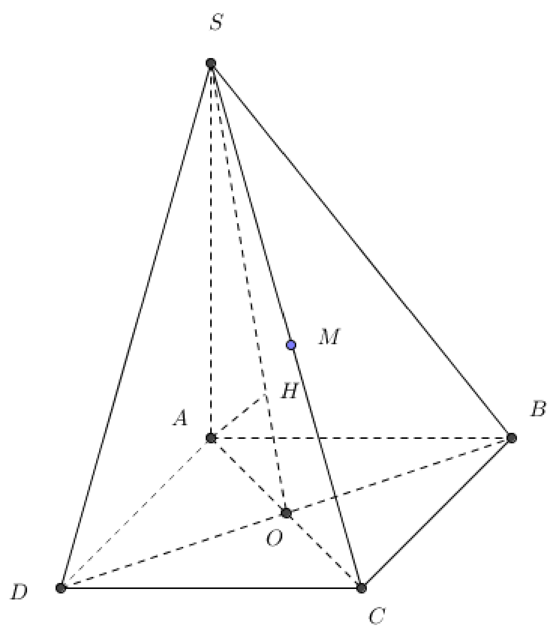
Tam giác vuông SOH có OK là đường cao nên $OK = \dfrac{OS.OH}{\sqrt{OS^2 + OH^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $d\left[O,(SCD)\right]=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 46: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh SC. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$

Lời giải



Do M là trung điểm SC nên $d\left(M;(SBD)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(C;(SBD)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A;(SBD)\right)$

Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(SBD)\Rightarrow d\left(A;(SBD)\right)=AH$

Lại có AS, AB, AD đôi một vuông góc nên

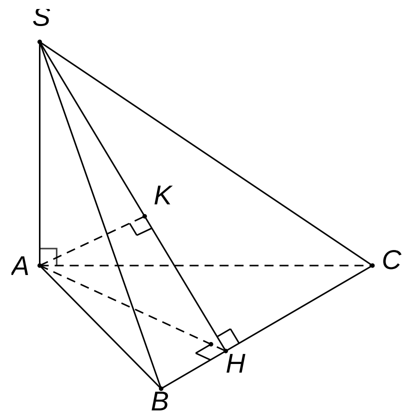
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{5}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{10}}{5}\Rightarrow d\left(M;(SBD)\right)=\frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$; SA vuông góc với đáy, $SA=2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Lời giải



Ta có

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp BC.$$

Trong (ABC), kẻ $AH \perp BC$, mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Trong (SAH), kẻ $AK \perp SH$, mà $SH \perp BC$ $\Rightarrow AK \perp (SBC)$ hay $d\left(A;(SBC)\right) = AK$.

Vì ΔABC vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.

Mặt khác có AH là đường cao nên $AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

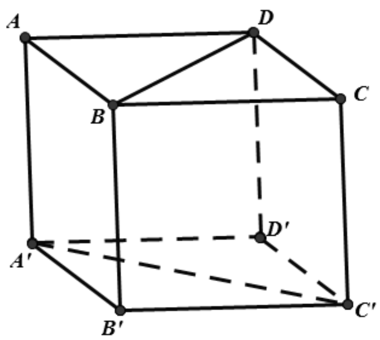
Vì ΔSAH vuông tại A nên $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \dfrac{\sqrt{19}a}{2}$.

Vậy có AK là đường cao $AK = \dfrac{SA.AH}{SH} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Nhận xét. ***Trong thực hành làm toán trắc nghiệm ta nên áp dụng bài toán sau:***

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC). Khi đó $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Câu 48: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



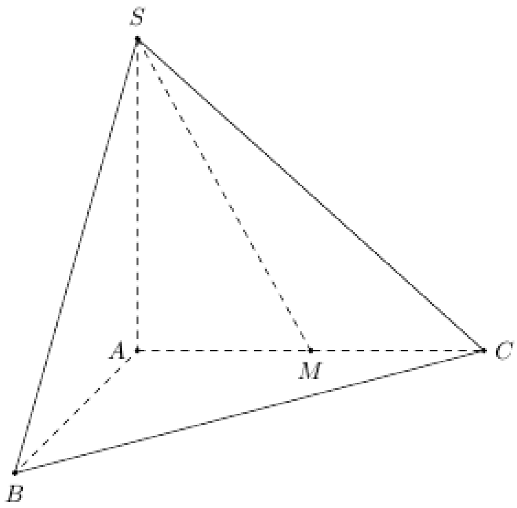
A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ **B.** $\sqrt{2}a$ **C.** $\sqrt{3}a$ **D.** a

Lời giải

Chọn D

Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BD và $A'C'$ bằng khoảng cách giữa mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ thứ tự chứa BD và $A'C'$. Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng a.

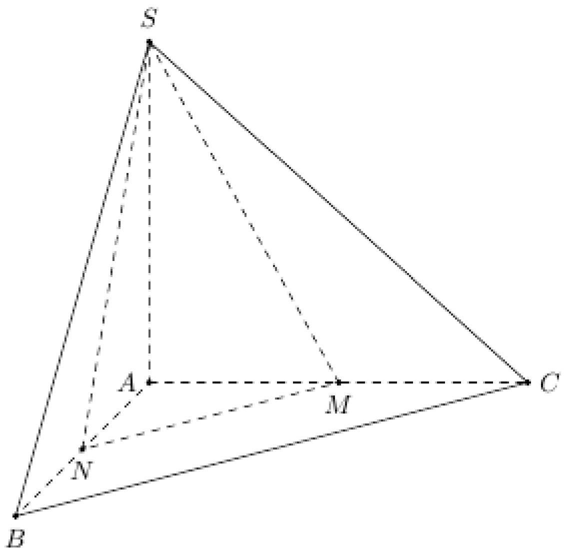
Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC, ta có: $MN//BC$ nên ta được $BC//(SMN)$.

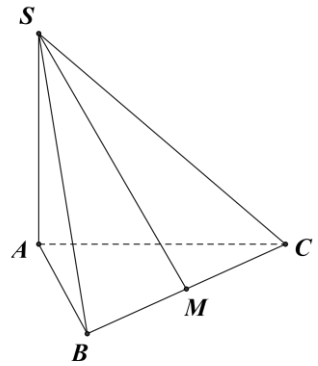
Do đó $d(BC, SM) = d(BC, (SMN)) = d(B, (SMN)) = d(A, (SMN)) = h$.

Tứ diện $A.SMN$ vuông tại A nên ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow h = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d\left(BC,SM\right)=\dfrac{2a}{3}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

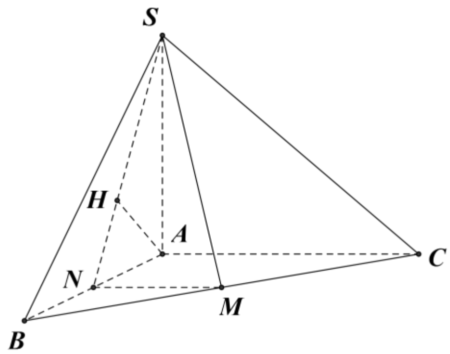


A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1 :



Gọi N là trung điểm của AB, khi đó $MN//AC$.

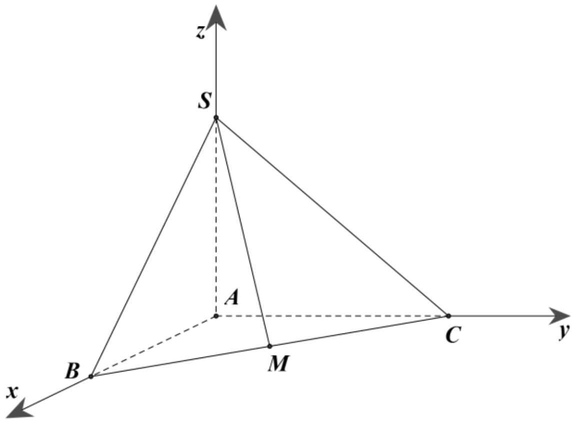
Gọi H là hình chiếu của A lên SN. Dễ dàng chứng minh được $AH\perp\left(SMN\right)$.

Suy ra $d\left(AC,SM\right)=d\left(AC,\left(SMN\right)\right)=d\left(A,\left(SMN\right)\right)=AH$.

Trong tam giác SAN vuông tại A có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AN^2}$, trong đó $AS=a\sqrt{3}$, $AN=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2}$.

Suy ra $AH=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. Vậy $d\left(AC,SM\right)=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Cách 2 :



Chọn $a=1$, gắn bài toán vào hệ trục tọa độ $Axyz$, trong đó $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{3}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Ta có: $d(SM,AC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{AC}\right]\right|}$ với $\overrightarrow{SM}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AC}=(0;1;0)$, $\overrightarrow{AS}=\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

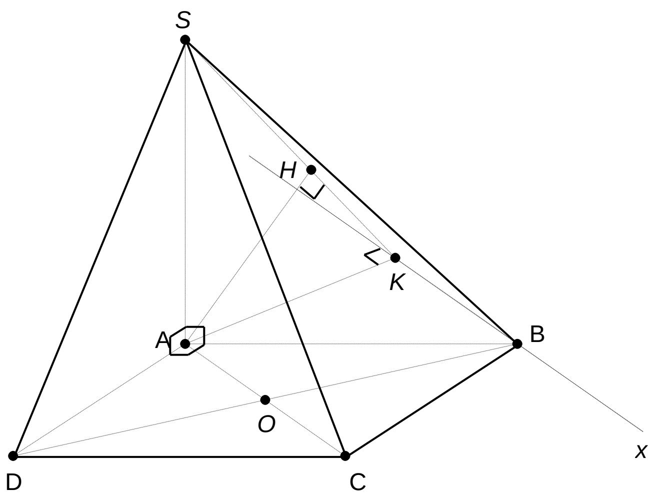
Suy ra $d(SM,AC)=\frac{\sqrt{39}}{13}$, hay $d(SM,AC)=\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là ình chữ nhật, $AB=a, BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$ **B.** $\frac{2a}{3}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Lời giải

Chọn B



Từ B kẻ $Bx//AC \Rightarrow AC//(SB,Bx)$

Suy ra $d(AC,SB)=d(AC,(SB,Bx))=d(A,(SB,Bx))$

Từ A kẻ $AK\perp Bx\,(K\in Bx)$ và $AH\perp SK$

Do $\begin{cases} AK\perp Bx \\ SA\perp Bx \end{cases} \Rightarrow Bx\perp(SAK)\Rightarrow Bx\perp AH$

Nên $AH \perp (SB, Bx) \Rightarrow d\left(A,(SB,Bx)\right) = AH$

Ta có ΔBKA đồng dạng với ΔABC vì hai tam giác vuông có $KBA = BAC$. Kẻ $MH \perp SA$ tại H thì MH là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng MH.

Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}SG = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SG = 4a$, $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$SA = \sqrt{AG^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9} + 16a^2} = \frac{7a\sqrt{3}}{3}$. Ta có

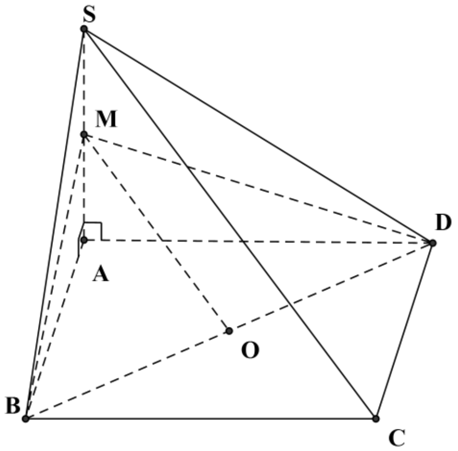
$SA.MH = SG.AM \Rightarrow MH = \frac{SG.AM}{SA} = \frac{3.4a.a\sqrt{3}}{2.7a\sqrt{3}} = \frac{6a}{7}$

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD, SC bằng

A. $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$ **B.** $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$ **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{12}$ **D.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm hình chữ nhật và M là trung điểm SA, ta có: $SC // (BMD)$.

Do đó $d(SC, BD) = d\left(SC,(BMD)\right) = d\left(S,(BMD)\right) = d\left(A,(BMD)\right) = h$

Ta có: AM, AB, AD đôi một vuông góc nên

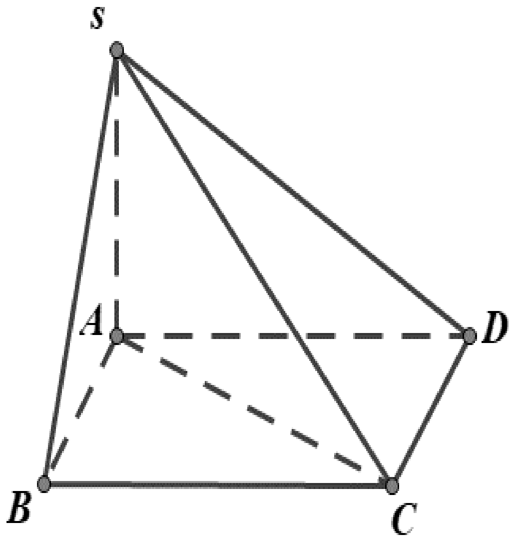
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2}$$

Suy ra: $h = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2a}{3}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} BC//AD \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC//(SAD) \Rightarrow d(BC,SD) = d(BC,(SAD)) = d(B,(SAD))$.

Có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \\ SA \cap AD = A \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD) \Rightarrow d(B,(SAD)) = BA$.

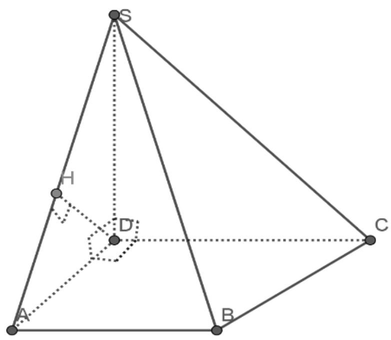
Xét tam giác vuông BAC, $BA = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy $d(B,(SAD)) = a\sqrt{3} \Rightarrow d(BC,SD) = a\sqrt{3}$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, SD vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $AD = 2a$, $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB)

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SD \end{cases}$ nên $AB \perp (SAD)$.

Kẻ $DH \perp SA$ tại H. Do $DH \subset (SAD)$ nên $AB \perp DH$.

Ta có: $\begin{cases} DH \perp SA \\ DH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB)$.

Do $DC // AB$ nên $DC // (SAB)$.

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) là DH.

Xét ΔSAD vuông tại D có: $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{1}{(2a)^2} = \dfrac{3}{4a^2}$.

$\Rightarrow DH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) là $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.