CHUYÊN ĐỀ: TÍCH PHÂN

PHẦN 1: DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

Dạng 1. Sử dụng tính chất, bảng nguyên hàm cơ bản để tính tích phân

1.Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K; a,b là hai phần tử bất kì thuộc K, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân của của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

2. Các tính chất của tích phân:

$+\int_a^a f(x)dx=0$	$+\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
$+\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$	$+\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
$+\int_a^b k.f(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx$	+ Nếu $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$\int x^\alpha.dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C$
$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$	$\int\frac{1}{(ax+b)^2}dx=-\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b}+C$
$\int\sin x.dx=-\cos x+C$	$\int\sin(ax+b).dx=-\frac{1}{a}.\cos(ax+b)+C$
$\int\cos x.dx=\sin x+C$	$\int\cos(ax+b).dx=\frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\sin^2 x}.dx=-\cot x+C$	$\int\frac{1}{\sin^2(ax+b)}.dx=-\frac{1}{a}.\cot(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}.dx=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2(ax+b)}.dx=\frac{1}{a}.\tan(ax+b)+C$
$\int e^x.dx=e^x+C$	$\int e^{ax+b}.dx=\frac{1}{a}.e^{ax+b}+C$
$\int a^x.dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

✍ **Nhận xét**. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Câu 1. **(Mã 101-2021-Lần 2)** Cho f là hàm số liên tục trên $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên $[1;2]$ thỏa $F(1)=-2$ và $F(2)=4$. Khi đó $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng.

A. 6. **B.** 2. **C.** -6. **D.** -2.

Câu 2. **(Mã 102-2021-Lần 2)** Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của f trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1)=-2$ và $F(2)=3$. Khi đó $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 5.

Câu 3. **(Mã 120-2021-Lần 2)** Nếu $\int_0^2 f(x)dx=3$ thì $\int_0^2[4x-f(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 5. **C.** 14. **D.** 11.

Câu 4. **(Mã 111-2021-Lần 2)** Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ thì $\int_0^2[2x-f(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 1. **D.** -2 .

Câu 5. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Nếu $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=1$ thì $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$ thì $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Câu 7. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 8. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2[2+f(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 9. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=4$. Giá trị của $\int_1^5 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 64. **D.** 12.

Câu 10. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2(2+f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** 7. **C.** 9. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 11. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_1^2 f(x)dx=2$. Giá trị của $\int_1^3 3f(x)dx$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 8.

Câu 12. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1+f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. 20. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 28.

Câu 13. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của $\int_2^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng.

A. 36. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 14. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1+f(x)]dx$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{26}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 15. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=4$ và $\int_2^3 g(x)\mathrm{d}x=1$. Khi đó: $\int_2^3 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng:

A. -3. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 16. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]\mathrm{d}x=2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng :

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 17. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_2^3 f(x)dx=3$ và $\int_2^3 g(x)dx=1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 18. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]dx=3$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 19. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=2$. Khi đó $\int_1^2 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng?

A. 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 20. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]\mathrm{d}x=4$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 21. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_1^2 f(x)dx=2$ và $\int_1^2 g(x)dx=3$. Khi đó $\int_1^2 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 6.

Câu 22. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]\mathrm{d}x=5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 23. **(Mã 103 - 2019)** Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x=6$, khi đó $\int_1^2 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -8.

Câu 24. **(Mã 102 - 2019)** Biết tích phân $\int_0^1 f(x)dx=3$ và $\int_0^1 g(x)dx=-4$. Khi đó $\int_0^1 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 25. **(Mã 104 - 2019)** Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=-4$, khi đó $\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 26. **(Mã 101 2019)** Biết $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$ và $\int\limits_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x=3$, khi đó $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** -5. **D.** 5.

Câu 27. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x=5$, khi $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -8 **B.** 1 **C.** -3 **D.** 12

Câu 28. **(THPT Ba Đình 2019)** Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K?

A. $\int\limits_a^b\left[f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+2\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b\dfrac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x=\dfrac{\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x}$.

C. $\int\limits_a^b\left[f(x).g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\left[\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

Câu 29. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho $\int\limits_{-2}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_{-2}^{4} f\left(t\right)\mathrm{d}t=-4$. Tính $\int\limits_{2}^{4} f\left(y\right)\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-5$.

Câu 30. **(THPT Cù Huy Cận -2019)** Cho $\int_0^2 f\left(x\right)dx=3$ và $\int_0^2 g\left(x\right)dx=7$, khi đó $\int_0^2\left[f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]dx$ bằng

A. 16. **B.** -18. **C.** 24. **D.** 10.

Câu 31. **(THPT - YÊN Định Thanh Hóa2019)** Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-1;\ \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=5$. Tính $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 32. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-3$ và $\int\limits_2^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Khi đó $\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 7. **C.** 1. **D.** -12.

Câu 33. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\left[-1;2\right]$, $\mathrm{f}\left(-1\right)=8;\mathrm{f}\left(2\right)=-1$. Tích phân $\int\limits_{-1}^{2}\mathrm{f}'\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}$ bằng

A. 1. **B.** 7. **C.** -9. **D.** 9.

Câu 34. **(Sở Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên R và có $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=9;\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=36$. **C.** $I=\dfrac{9}{4}$. **D.** $I=13$.

Câu 35. Cho $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 3\int_{0}^{3} f(x)dx = 3$. Tích phân $\int_{1}^{3} f(x)dx$ bằng

A. 6 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Câu 36. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 10$, $\int_{3}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tích phân $\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 37. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Nếu $F'(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

A. $\ln 7$. **B.** $1 + \dfrac{1}{2}\ln 7$. **C.** $\ln 3$. **D.** $1 + \ln 7$.

Câu 38. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\int_{1}^{8} f(x)\mathrm{d}x = 9$, $\int_{4}^{12} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_{4}^{8} f(x)\mathrm{d}x = 5$.

Tính $I = \int_{1}^{12} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 17$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 11$. **D.** $I = 7$.

Câu 39. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_{0}^{10} f(x)dx = 7$, $\int_{2}^{6} f(x)dx = 3$. Tính $P = \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{6}^{10} f(x)dx$.

A. $P = 10$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -6$.

Câu 40. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả: $\int_{1}^{3}[f(x) + 3g(x)]\mathrm{d}x = 10$, $\int_{1}^{3}[2f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int_{1}^{3}[f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 41. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_{0}^{10} f(x)dx = 7$; $\int_{2}^{6} f(x)dx = 3$. Tính $P = \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{6}^{10} f(x)dx$.

A. $P = 4$ **B.** $P = 10$ **C.** $P = 7$ **D.** $P = -4$

Câu 42. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_{1}^{3}[f(x) + 3g(x)]\mathrm{d}x = 10$ đồng thời $\int_{1}^{3}[2f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int_{1}^{3}[f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 43. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_{1}^{3}[f(x) + 3g(x)]\mathrm{d}x = 10$ và $\int_{1}^{3}[2f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_{1}^{3}[f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 44. **(Mã 104 2017)** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + 2\sin x \right] \mathrm{d}x = 5$.

A. $I = 7$ **B.** $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ **C.** $I = 3$ **D.** $I = 5 + \pi$

Câu 45. **(Mã 110 2017)** Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) - 3g(x) \right] \mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{17}{2}$ **B.** $I = \frac{5}{2}$ **C.** $I = \frac{7}{2}$ **D.** $I = \frac{11}{2}$

Câu 46. **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Cho hai tích phân $\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int_{-2}^{5} \left[f(x) - 4g(x) - 1 \right] \mathrm{d}x$

A. 13. **B.** 27. **C.** −11. **D.** 3.

Câu 47. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -1$, khi đó $\int_{-1}^{2} \left[x + 2f(x) + 3g(x) \right] dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 48. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3, \int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int_0^2 \left[f(x) - 5g(x) + x \right] \mathrm{d}x$ bằng:

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10

Câu 49. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = -2$. Tích phân $\int_0^5 \left[4f(x) - 3x^2 \right] \mathrm{d}x$ bằng

A. −140. **B.** −130. **C.** −120. **D.** −133.

Câu 50. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho $\int_1^2 \left[4f(x) - 2x \right] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. 1. **B.** −3. **C.** 3. **D.** −1.

Câu 51. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 1$ tích phân $\int_0^1 \left(2f(x) - 3x^2 \right) dx$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** −1.

Câu 52. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính tích phân $I = \int_{-1}^{0} (2x+1)dx$.

A. $I = 0$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = -\frac{1}{2}$.

Câu 53. Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 54. **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ -2019)** Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 55. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Tính tích phân $I=\int_0^2(2x+1)dx$

A. $I=5$. **B.** $I=6$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Câu 56. Với a,b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b\left(3x^2-2ax-1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. b^3-b^2a-b. **B.** b^3+b^2a+b. **C.** b^3-ba^2-b. **D.** $3b^2-2ab-1$.

Câu 57. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Giả sử $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3xdx=a+b\frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$. Khi đó giá trị của $a-b$ là

A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $-\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{3}{10}$ **D.** $\frac{1}{5}$

Câu 58. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2\left(f\left(x\right)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 18. **D.** -18.

Câu 59. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho $\int_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-1;2\right)$. **B.** $\left(-\infty;0\right)$. **C.** $\left(0;4\right)$. **D.** $\left(-3;1\right)$.

Câu 60. **(Mã 104 2018)** $\int_1^2\frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln 35$ **B.** $\ln\frac{7}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$ **D.** $2\ln\frac{7}{5}$

Câu 61. **(Mã 103 2018)** $\int_1^2\frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$ **B.** $\frac{1}{3}\ln 2$ **C.** $\frac{2}{3}\ln 2$ **D.** $\ln 2$

Câu 62. **(Đề Tham Khảo 2018)** Tích phân $\int_0^2\frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{2}{15}$ **B.** $\frac{16}{225}$ **C.** $\log\frac{5}{3}$ **D.** $\ln\frac{5}{3}$

Câu 63. **(Mã 105 2017)** Cho $\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+2b=0$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a-2b=0$ **D.** $a+b=-2$

Câu 64. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tính tích phân $I=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

A. $I=\frac{1}{e}$ **B.** $I=\frac{1}{e}+1$ **C.** $I=1$ **D.** $I=e$

Câu 65. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tính tích phân $I=\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$.

A. $I=-\frac{21}{100}$. **B.** $I=\ln\frac{5}{2}$. **C.** $I=\log\frac{5}{2}$. **D.** $I=\frac{4581}{5000}$.

Câu 66. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\frac{1}{3}\ln 2$.

Câu 67. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=1-\ln 2$. **B.** $I=\frac{7}{4}$. **C.** $I=1+\ln 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Câu 68. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx=a+b\ln c,$ với $a,b,c\in\mathbb{Z},c<9.$ Tính tổng $S=a+b+c.$

A. $S=7$. **B.** $S=5$. **C.** $S=8$. **D.** $S=6$.

Câu 69. **(Mã 110 2017)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Tính: $I=F(e)-F(1)$?

A. $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{1}{e}$ **C.** $I=1$ **D.** $I=e$

Câu 70. **(Mã 102 2018)** $\int_0^1 e^{3x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4+e)$ **B.** e^3-e **C.** $\frac{1}{3}(e^4-e)$ **D.** e^4-e

Câu 71. **(Mã 101 2018)** $\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^5+\mathrm{e}^2\right)$ **B.** $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2\right)$ **C.** $\frac{1}{3}\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$ **D.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$

Câu 72. **(Mã 123 2017)** Cho $\int_0^6 f(x)dx=12$. Tính $I=\int_0^2 f(3x)dx.$

A. $I=5$ **B.** $I=36$ **C.** $I=4$ **D.** $I=6$

Câu 73. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tích phân $I=\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\ln 2-1$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $1-\ln 2$.

Câu 74. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên -2019)** Tính $K=\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $K=\ln 2$. **B.** $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. **C.** $K=2\ln 2$. **D.** $K=\ln\frac{8}{3}$.

PHẦN 2: DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ

Dạng 1. Tích phân cơ bản có điều kiện

1.Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K; a,b là hai phần tử bất kì thuộc K, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân của của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

2. Các tính chất của tích phân:

+ $\int_a^a f(x)dx=0$
+ $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
+ $\int_a^b k.f(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx$
+ $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
+ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
+ Nếu $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$\int x^\alpha.dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C$
$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$	$\int\frac{1}{(ax+b)^2}dx=-\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b}+C$
$\int\sin x.dx=-\cos x+C$	$\int\sin(ax+b).dx=-\frac{1}{a}.\cos(ax+b)+C$
$\int\cos x.dx=\sin x+C$	$\int\cos(ax+b).dx=\frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\sin^2 x}.dx=-\cot x+C$	$\int\frac{1}{\sin^2(ax+b)}.dx=-\frac{1}{a}.\cot(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}.dx=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2(ax+b)}.dx=\frac{1}{a}.\tan(ax+b)+C$
$\int e^x.dx=e^x+C$	$\int e^{ax+b}.dx=\frac{1}{a}.e^{ax+b}+C$
$\int a^x.dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

✍ **Nhận xét**. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Câu 1. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1)=0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

A. $\ln 8+1$. **B.** $4\ln 2+1$. **C.** $2\ln 3+2$. **D.** $2\ln 4$.

Câu 2. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2-4}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+15\pi}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

Câu 3. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3,\ \forall x\in R$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\frac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ .Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+6\pi+8}{8}$. **D.** $\frac{\pi^2+2}{8}$.

Câu 5. Biết rằng hàm số $f(x)=mx+n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $m+n=4$. **B.** $m+n=-4$. **C.** $m+n=2$. **D.** $m+n=-2$.

Câu 6. Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 $(0<a_1<a_2)$ thỏa mãn $\int_1^a (2x-3)\mathrm{d}x=0$. Hãy tính $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$.

A. $T=26$. **B.** $T=12$. **C.** $T=13$. **D.** $T=28$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho $\int_0^m (3x^2-2x+1)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 9. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho $I=\int_0^1 (4x-2m^2)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I+6>0$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10. **(Sở GD Kon Tum - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x-3)\mathrm{d}x\le 4$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh - HN 2018).**Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^{b} 4\cos 2x dx = 1$?

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 12. **(Cần Thơ - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$, $f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2$. Giá trị biểu thức $f(-4)+f(0)+f(4)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. **(Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018)** Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx = a+e^b-e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$

A. $T=-3$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-4$. **D.** $T=-5$.

Câu 14. **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $f(-2)=\frac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng

A. $\frac{6\ln 2-3}{4}$. **B.** $\frac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\frac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $\frac{8\ln 2-3}{4}$.

Câu 15. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$ Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng.

A. $\frac{\pi^2+16\pi+16}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+4}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+14\pi}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

Câu 16. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\sin^4 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2-6}{18}$. **B.** $\frac{\pi^2-3}{32}$. **C.** $\frac{3\pi^2-16}{64}$. **D.** $\frac{3\pi^2-6}{112}$.

Dạng 2. Tích phân hàm số hữu tỷ

Tính $I=\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$? với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không chứa căn.

□ Nếu bậc của tử $P(x)$ ≥ bậc mẫu $Q(x)$ $\xrightarrow{PP}$ chia đa thức.

□ Nếu bậc của tử $P(x)$ < bậc mẫu $Q(x)$ mà mẫu số **phân tích được thành tích** số $\xrightarrow{PP}$ đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

$$+\ \frac{1}{(ax+m)(bx+n)}=\frac{1}{an-bm}\left(\frac{a}{ax+m}-\frac{b}{bx+n}\right)\ (1)$$

+ $\dfrac{mx+n}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}=\dfrac{(A+B)x-(Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=m\\Ab+Ba=-n\end{cases}$.

+ $\dfrac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\dfrac{A}{x-m}+\dfrac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$ với $\Delta=b^2-4ac<0$.

+ $\dfrac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-b}+\dfrac{D}{(x-b)^2}$.

□ Nếu bậc tử $P(x)$ < bậc mẫu $Q(x)$ mà **mẫu không phân tích được thành tích số**, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

+ $I_1=\int\dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n},(n\in N^*)\xrightarrow{PP}x=a.\tan t$.

+ $I_2=\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c},(\Delta<0)=\int\dfrac{dx}{a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(-\dfrac{\Delta}{4a}\right)\right]}$. Ta sẽ đặt $\longrightarrow x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{-\dfrac{\Delta}{4a}}\tan t$.

+ $I_3=\int\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}.dx$ với $\Delta=b^2-4ac<0$. Ta sẽ phân tích:

$I_3=\dfrac{p}{2a}\underbrace{\int\dfrac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}}_{A}+\left(q-\dfrac{b.p}{2a}\right).\underbrace{\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2}$ và giải A bằng cách đặt $t=$ mẫu số.

Câu 1. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Biết $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 2. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Biết $I=\int_{-1}^{0}\dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=a\ln\dfrac{2}{3}+b,(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $a+4b$ bằng

A. 50 **B.** 60 **C.** 59 **D.** 40

Câu 3. Biết $\int_0^1\dfrac{x^2-2}{x+1}dx=\dfrac{-1}{m}+n\ln 2$, với m,n là các số nguyên. Tính $m+n$.

A. $S=1$. **B.** $S=4$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=-1$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Tích phân $I=\int_0^1\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=a-\ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 5. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết $\int_3^5\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=a+\ln\dfrac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=5$. **D.** $S=10$.

Câu 6. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho $\int_1^2\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$?

A. $P=1$. **B.** $P=5$. **C.** $P=7$. **D.** $P=2$.

Câu 7. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho $\int_1^3\frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 8. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_3^4\frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

A. 12 **B.** 6 **C.** 1 **D.** 64

Câu 9. Biết $\int_3^5\frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=a+\ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=5$. **D.** $S=10$.

Câu 10. Biết rằng $\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z},a<10)$. Khi đó $a+b$ có giá trị bằng

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 12.

Câu 11. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Biết $\int_0^2\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

Câu 12. **(THPT Nguyễn Trãi - Dà Nẵng - 2018)** Giả sử rằng $\int_{-1}^0\frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=a\ln\frac{2}{3}+b$. Khi đó, giá trị của $a+2b$ là

A. 30. **B.** 60. **C.** 50. **D.** 40.

Câu 13. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Biết $\int_1^4\frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a-b^2-c^3$.

A. -5. **B.** -4. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 14. Cho $\int_0^1\frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T=a.c-b$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 15. **(SGD Bến Tre 2019)** Biết $\int_0^1\frac{x^2-2}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{-1}{m}+n\ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $S=m+n$.

A. $S=-1$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=1$. **D.** $S=4$.

Câu 16. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 17. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{2x^2+3x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 18. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho biết $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5 + b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $T = a^2 + b^2$ bằng

A. 13. **B.** 10. **C.** 25. **D.** 5.

Câu 19. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = a + b\ln 3 + c\ln 5$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

Câu 20. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b} + c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P = a - b^2 - c^3$.

A. -5. **B.** -3. **C.** 6. **D.** -4.

Câu 21. **(Bình Phước - 2019)** Cho $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b^2 - c^3$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 22. **(SGD Đà Nẵng 2019)** Cho $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 7$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $2a+3b+7c$ bằng

A. -9. **B.** 6. **C.** 15. **D.** 3.

Câu 23. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx = a + b.\ln 2 + c.\ln 3$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị $6a+b+c$ bằng:

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 24. **(SP Đồng Nai - 2019)** Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

A. -11. **B.** -14. **C.** -2. **D.** 3.

Dạng 3. Tích phân đổi biến

② **Tích phân đổi biến**: $\int_a^b [f(x)].u'(x).dx = F[u(x)]\Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)]$.

Có sẵn — Tách từ hàm — Nhân

Các bước tính tích phân đổi biến số

□ **Bước 1**. Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x).dx$ (quan trọng)

□ **Bước 2**. Đổi cận: $\begin{cases} x = b \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = u(b) \\ t = u(a) \end{cases}$ (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)

□ **Bước 3**. Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t).dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

Một số phương pháp đổi biến số thường gặp

Đổi biến dạng 1. $\boxed{I = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}.dx = \underbrace{\int_a^b h(x).dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^b f\left(g(x)\right).\frac{g'(x)}{g(x)}.dx}_{I_2}}$ với

<u>Đổi biến dạng 2</u>.

Nghĩa là nếu gặp tích phân **chứa căn thức** thì có khoảng 80% sẽ đặt $t =$ căn trừ một số trường hợp ngoại lệ sau:

1/ $I_1 = \int f\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x = a.\sin t$ hoặc $x = a.\cos t$.

(xuất phát từ công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{array}\right.$)

2/ $I_2 = \int f\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x = a.\tan t$ hoặc $x = a.\cot t$.

(mấu chốt xuất phát từ công thức $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$)

3/ $I_3 = \int f\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$.

4/ $I_4 = \int f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right)dx \longrightarrow$ đặt $x = a.\cos 2t$.

5/ $I_5 = \int \frac{dx}{\left(a + bx^n\right)\sqrt[n]{a + bx^n}} \longrightarrow$ đặt $x = \frac{1}{t}$.

6/ $I_6 = \int R\left[\sqrt[s_1]{ax + b}, ..., \sqrt[s_k]{ax + b}\right].dx \longrightarrow$ đặt $t^n = ax + b$.

(trong đó n là bội số chung nhỏ nhất của $\{s_1; s_2; ...; s_k\}$)

7/ $I_7 = \int \frac{dx}{\sqrt{(ax + b)(cx + d)}} \longrightarrow$ đặt $t = \sqrt{ax + b} + \sqrt{cx + d}$.

Đổi biến dạng 3. $\boxed{\int f\left(\ln x\right).\frac{1}{x}.dx \longrightarrow t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}.dx}$

Đổi biến dạng 4. $\boxed{\int f\left(\sin x\right).\cos x.dx \longrightarrow t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x.dx}$

Đổi biến dạng 5. $\boxed{\int f\left(\cos x\right).\sin x.dx \longrightarrow t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x.dx}$

Đổi biến dạng 6. $\boxed{\int f\left(\tan x\right).\frac{1}{\cos^2 x}dx \longrightarrow t=\tan x \Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}}$

Đổi biến dạng 7. $\boxed{\int f\left(\cot x\right).\frac{1}{\sin^2 x}dx \longrightarrow t=\cot x \Rightarrow dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}}$

Đổi biến dạng 8. $\boxed{\begin{array}{l}\int f\left(\sin x+\cos x\right).\left(\sin x-\cos x\right)dx \\ \int f\left(\sin x-\cos x\right).\left(\sin x+\cos x\right)dx\end{array} \longrightarrow \begin{array}{l}t=\sin x+\cos x \\ t=\sin x-\cos x\end{array}}$

Đổi biến dạng 9. $\boxed{\begin{array}{l}\int f\left(ax^2+b\right)^n.xdx \longrightarrow t=ax^2+b \Rightarrow dt=2axdx \\ \int f\left(ax+b\right)^n.xdx \longrightarrow t=ax+b \Rightarrow dt=adx\end{array}}$

Câu 1. **(Đề Tham Khảo -2019)** Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{\left(x+2\right)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** -1

Câu 2. Tính $K=\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $K=\ln 2$. **B.** $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. **C.** $K=2\ln 2$. **D.** $K=\ln\frac{8}{3}$.

Câu 3. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^7}{\left(1+x^2\right)^5}\mathrm{d}x$, giả sử đặt $t=1+x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\left(t-1\right)^3}{t^5}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int_1^3 \frac{\left(t-1\right)^3}{t^5}\mathrm{d}t$.

C. $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\left(t-1\right)^3}{t^4}\mathrm{d}t$. **D.** $I=\frac{3}{2}\int_1^4 \frac{\left(t-1\right)^3}{t^4}\mathrm{d}t$.

Câu 4. **(KTNL Gia Bình Năm 2019)** Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=1$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 5. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=0$ và $f'(x)=2019.2020.x(x-1)^{2018}, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{2021}$. **B.** $\frac{1}{1011}$. **C.** $-\frac{2}{2021}$. **D.** $-\frac{1}{1011}$.

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 1

Câu 7. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x=A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với $A,B,C\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A+7B$.

A. $\frac{23}{252}$ **B.** $\frac{241}{252}$ **C.** $\frac{52}{9}$ **D.** $\frac{7}{9}$

Câu 8. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Biết $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x=a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2$.

A. 13. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 9. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho $\int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x=m\left(e^p-e^q\right)$ với m, p, $q\in\mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m+p+q$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** 8.

Câu 10. Biết rằng $\int_0^1 xe^{x^2+2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\left(e^b-e^c\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 11. **(KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Biết $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\ln(ae+b)$ với a,b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2-ab+b^2$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx=me^{\frac{p}{q}}-n$, trong đó m,n,p,q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T=m+n+p+q$.

A. $T=11$. **B.** $T=10$. **C.** $T=7$. **D.** $T=8$.

Câu 13. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\int_{2x}^{x^2}\frac{2tdt}{1+t^2}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0)=f(1)=5$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=10$ **B.** $I=-5$ **C.** $I=0$ **D.** $I=5$

Câu 15. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x>0$. Khi đó $\int_3^8 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\dfrac{197}{6}$. **C.** $\dfrac{29}{2}$. **D.** $\dfrac{181}{6}$.

Câu 16. **(Mã 102 2018)** Cho $\int_5^{21}\dfrac{dx}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=-2c$ **B.** $a+b=-2c$ **C.** $a+b=c$ **D.** $a-b=-c$

Câu 17. **(Mã 101 2018)** Cho $\int_{16}^{55}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=3c$ **B.** $a-b=-3c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=c$

Câu 18. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^3\sqrt{u}du$ **B.** $I=\dfrac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}du$ **C.** $I=2\int_0^3\sqrt{u}du$ **D.** $I=\int_1^2\sqrt{u}du$

Câu 19. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Giả sử tích phân $I=\int_1^5\dfrac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=a+b\ln 3+c\ln 5$. Lúc đó

A. $a+b+c=\dfrac{5}{3}$. **B.** $a+b+c=\dfrac{4}{3}$. **C.** $a+b+c=\dfrac{7}{3}$. **D.** $a+b+c=\dfrac{8}{3}$.

Câu 20. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(2)=0$ và $f'(x)=\dfrac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x\in\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{Z},b>0,\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a+b$ bằng

A. 250. **B.** 251. **C.** 133. **D.** 221.

Câu 21. **(Nam Định - 2018)** Biết tích phân $\int_0^{\ln 6}\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

Câu 22. **(Chuyên Vinh - 2018)** Tích phân $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2018)** Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} dx = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=18$ **B.** $P=46$ **C.** $P=24$ **D.** $P=12$

Câu 24. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{3}{4}$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Câu 25. **(Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho tích phân $I=\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2}\,dx$ và $x=4\sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I=8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)\,dt$. **B.** $I=16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\,dt$.

C. $I=8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2t)\,dt$. **D.** $I=-16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt$.

Câu 26. Biết $\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a+b\ln 3+c\ln 5$ $(a,b,c\in Q)$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 27. Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12 **B.** 10 **C.** 18 **D.** 15

Câu 28. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 91.

Câu 29. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7} = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$ **B.** $-\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{10}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 30. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{3}{4}$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Câu 31. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx = \frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 9 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 7

Câu 32. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho $I=\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a}{d}+b\ln 2+c\ln d$, với a,b,c,d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 28. **D.** -2.

Câu 33. Tính $I=\int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

A. $I=\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1$. **B.** $I=\frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1\right]$.

C. $I=\frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}+1\right]$. **D.** $I=\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}+1$.

Câu 34. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$ bằng tích phân nào dưới đây?

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$. **B.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y}\mathrm{d}y$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$.

Câu 35. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Biết $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{b}{a}\ln 5-c\ln 2$ với a,b,c là các số nguyên và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính $P=3a+2b+c$.

A. 11. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Câu 36. **(Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Cho tích phân $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = a+b\sqrt{6}+c\ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right)+d\ln 2$ với a,b,c,d là các số hữu tỉ. Tính tổng $a+b+c+d$.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{3}{25}$. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{20}$.

Câu 37. **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho tích phân $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ nếu đổi biến số $x=2\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì ta được.

A. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Câu 38. **(THPT Phú Lương - Thái Nguyên - 2018)** Biết $\int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{a\sqrt{b}+c}{15}$ với a, b, c là các số nguyên và $b\geq 0$. Tính $P=a+b^2-c$.

A. $P=3$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-7$. **D.** $P=5$.

Câu 39. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x$ theo n.

A. $I=\dfrac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2n}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2n+1}$.

Câu 40. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Giả sử $I=\int_1^{64}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\dfrac{2}{3}+b$ với a, b là số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là

A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

Câu 41. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\sqrt{2}\right)=-2$ và $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{6-x^2}},\forall x\in\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. Khi đó $\int_0^{\sqrt{3}}f(x).\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{3\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi+6}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi+2}{4}$. **D.** $-\dfrac{3\pi+6}{4}$.

Câu 42. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Biết $\int_1^2\dfrac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P=a+2b+c-7$.

A. $-\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{86}{27}$. **C.** -2. **D.** $\dfrac{67}{27}$.

Câu 43. **(THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Biết $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

Câu 44. **(SởPhú Thọ - 2018)** Biết $\int_0^4\dfrac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\dfrac{5}{3}\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3$.

Câu 45. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x\cos^2 2x,\forall\in R$. Khi đó $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1042}{225}$. **B.** $\dfrac{208}{225}$. **C.** $\dfrac{242}{225}$. **D.** $\dfrac{149}{225}$.

Câu 46. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x=a\ln\dfrac{4}{b}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 47. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{1}{4}$ **B.** $I=-\dfrac{1}{4}\pi^4$ **C.** $I=-\pi^4$ **D.** $I=0$

Câu 48. **(THPT Kinh Môn - 2018)** Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}\mathrm{d}x = a\ln\frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a + b + c$

A. $S = 1$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 0$.

Câu 49. **(Bình Dương 2018)** Cho tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x}.\sin x\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t = 2 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

A. $I = \int\limits_3^2 \sqrt{t}\mathrm{d}t$. **B.** $I = \int\limits_2^3 \sqrt{t}\mathrm{d}t$. **C.** $I = 2\int\limits_3^2 \sqrt{t}\mathrm{d}t$. **D.** $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t}\mathrm{d}t$.

Câu 50. **(Đồng Tháp - 2018)** Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u = \tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} u^2\mathrm{d}u$. **B.** $I = \int\limits_0^2 \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$. **C.** $I = -\int\limits_0^1 u^2\mathrm{d}u$. **D.** $I = \int\limits_0^1 u^2\mathrm{d}u$.

Câu 51. **(THTP Lê Quý Đôn - Hà Nội - 2018)** Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{5}{2}$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$. **D.** $I = \frac{9}{4}$.

Câu 52. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2}\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$.

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2a + b = 0$. **B.** $a - 2b = 0$. **C.** $2a - b = 0$. **D.** $a + 2b = 0$.

Câu 53. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số $a \in (0; 20\pi)$ sao cho $\int\limits_0^a \sin^5 x \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{2}{7}$.

A. 10. **B.** 9. **C.** 20. **D.** 19.

Câu 54. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$ và $F(0) = 2$.

Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} - 8}{3}$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} + 8}{3}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2} - 8}{3}$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2} + 8}{3}$

Câu 55. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$ và a, b, c là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

A. 5. **B.** 12. **C.** 7. **D.** -1.

Câu 56. Cho tích phân số $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2$ với $a,b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0.$ **B.** $a-2b=0.$ **C.** $2a-b=0..$ **D.** $a+2b=0..$

Câu 57. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5\cos x + 6}\mathrm{d}x = a\ln\frac{4}{c} + b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c>0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=3.$ **B.** $S=0.$ **C.** $S=1.$ **D.** $S=4.$

Câu 58. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=1$ và $f'(x)=\tan^3 x+\tan x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{a+\pi}{b}; a,b\in\mathbb{Q}$, khi đó $b-a$ bằng

A. $4.$ **B.** $12.$ **C.** $0.$ **D.** $-4.$

Câu 59. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\sin^8 x-\cos^8 x-4\sin^6 x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_0^{\pi} 16f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=10\pi^2.$ **B.** $I=160\pi.$ **C.** $I=16\pi^2.$ **D.** $I=-10\pi^2.$

Câu 60. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} = a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=-2.$ **B.** $S=0.$ **C.** $S=1.$ **D.** $S=2.$

Câu 61. **(Cần Thơ - 2018)** Cho tích phân $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{3\ln x+1}{x}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\ln x$ thì

A. $I=\int\limits_0^1 \frac{3t+1}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t.$ **B.** $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{3t+1}{t}\mathrm{d}t.$ **C.** $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} (3t+1)\mathrm{d}t.$ **D.** $I=\int\limits_0^1 (3t+1)\mathrm{d}t.$

Câu 62. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho $I=\int\limits_1^{e} \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx = a\ln 3+b\ln 2+\frac{c}{3}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đâu đúng.

A. $a^2+b^2+c^2=1.$ **B.** $a^2+b^2+c^2=11.$ **C.** $a^2+b^2+c^2=9.$ **D.** $a^2+b^2+c^2=3.$

Câu 63. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Biết $I=\int\limits_0^4 x\ln(x^2+9)\mathrm{d}x = a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a,b,c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là:

A. $T=11.$ **B.** $T=9.$ **C.** $T=10.$ **D.** $T=8.$

Câu 64. Cho $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $I=\ln a+b$ với $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab=-1.$ **B.** $2ab=1.$ **C.** $-b+\ln\frac{3}{2a}=-\frac{1}{3}.$ **D.** $-b+\ln\frac{3}{2a}=\frac{1}{3}.$

Câu 65. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x = \ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 66. **(Kim Liên - Hà Nội – 2018)** Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{m}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln n}\ln\left(p+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

A. $S=6$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Câu 67. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(3x^3-1)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e}^3+b+c.\ln(\mathrm{e}+1)$ với a,b,c là các số nguyên và $\ln \mathrm{e}=1$. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=14$. **C.** $P=10$. **D.** $P=3$.

Câu 68. Biết $I=\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}+4}=\frac{1}{c}(\ln a-\ln b+\ln c)$ với a, b, c là các số nguyên dương.

Tính $P=2a-b+c$.

A. $P=-3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=3$

Câu 69. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Biết $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x = \ln(\ln a+b)$ với a, b là các số nguyên dương.

Tính $P=a^2+b^2+ab$.

A. 10. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 6.

Câu 70. **(Chuyên Thái Bình 2018)** Cho $\int_0^1 \frac{(x^2+x)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e}+b\ln(\mathrm{e}+c)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$.

A. $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

Câu 71. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f(0)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)=xe^{x^2}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\int_0^1 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{e+1}{4}$. **B.** $\frac{e-1}{4}$. **C.** $\frac{e-1}{2}$. **D.** $\frac{e+1}{2}$.

Câu 72. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Biết rằng $\int_1^e \frac{2\ln x+1}{x\ \ln x+1^{\ 2}}\mathrm{d}x = a\ln 2-\frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=10$. **D.** $S=5$.

Dạng 4. Tích phân từng phần

Nếu u,v có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$ thì $\boxed{I=\int_a^b u.dv=u.v\big|_a^b-\int_a^b v.du}$.

Vi phân

Nguyên hàm

Chọn $\begin{cases} u = \ldots\ldots\ldots\ldots \longrightarrow du = \ldots\ldots\ldots dx \\ dv = \ldots\ldots\ldots dx \longrightarrow v = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Nhận dạng: **tích hai hàm khác loại nhân nhau** (ví dụ: mũ nhân lượng giác,…)

Thứ tự ưu tiên **chọn u** là: "**log – đa – lượng – mũ**" và **dv là phần còn lại**.

Nghĩa là nếu có ln hay $\log_a x$ thì chọn $u = \ln$ hay $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a}.\ln x$ và $dv =$ còn lại. Nếu không có ln; log thì chọn $u =$ đa thức và $dv =$ còn lại,…

CHÚ Ý:. $\int_a^b$(hàm mũ). (lượng giác). dx $\longrightarrow$ tích phân từng phần luân hồi.

Nghĩa là sau khi đặt u, dv để tính tích phân từng phần và tiếp tục tính $\int udv$ sẽ xuất hiện lại tích phân ban đầu. Giả sử tích phân được tính ban đầu là I và nếu lập lại, ta sẽ không giải tiếp mà xem đây là phương trình bậc nhất ẩn là I $\overset{\text{giải}}{\Longrightarrow}$ I.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét $\int_0^2 xe^{x^2}dx$, nếu đặt $u = x^2$ thì $\int_0^2 xe^{x^2}dx$ bằng

A. $2\int_0^2 e^u du$. **B.** $2\int_0^4 e^u du$. **C.** $\frac{1}{2}\int_0^2 e^u du$. **D.** $\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du$.

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân $I = \int_1^e x\ln x dx$:

A. $I = \frac{e^2-1}{4}$ **B.** $I = \frac{1}{2}$ **C.** $I = \frac{e^2-2}{2}$ **D.** $I = \frac{e^2+1}{4}$

Câu 3. **(Mã 103 2018)** Cho $\int_1^e (1+x\ln x)dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a+b=-c$ **C.** $a-b=c$ **D.** $a-b=-c$

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Cho $\int_1^e (2+x\ln x)dx = ae^2 + be + c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a-b=c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=-c$

Câu 5. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Biết $\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx = a\ln 2 - \frac{b}{c}$ (với $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính $P = 13a + 10b + 84c$.

A. 193. **B.** 191. **C.** 190. **D.** 189.

Câu 6. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho a là số thực dương. Tính $I = \int_0^a \sin^{2016} x.\cos(2018x)dx$ bằng:

A. $I = \frac{\cos^{2017} a.\sin 2017a}{2016}$. **B.** $I = \frac{\sin^{2017} a.\cos 2017a}{2017}$.

C. $I = \frac{\sin^{2017} a.\cos 2017a}{2016}$. **D.** $I = \frac{\cos^{2017} a.\cos 2017a}{2017}$.

Câu 7. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=-1$ và $f'(x)=x\left(6+12x+e^{-x}\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $3e$. **B.** $3e^{-1}$. **C.** $4-3e^{-1}$. **D.** $-3e^{-1}$.

Câu 8. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Biết $I=\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=9$. **B.** $T=11$. **C.** $T=8$. **D.** $T=10$.

Câu 9. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Xét hàm số $f(x)=e^x+\int_0^1 xf(x)dx$. Giá trị của $f(\ln(5620))$ bằng

A. 5622. **B.** 5620. **C.** 5618. **D.** 5621.

Câu 10. Tích phân $\int_0^1 (x-2)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{-5-3\mathrm{e}^2}{4}$. **B.** $\dfrac{5-3\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\dfrac{5-3\mathrm{e}^2}{2}$. **D.** $\dfrac{5+3\mathrm{e}^2}{4}$.

Câu 11. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=a+b.\mathrm{e}$, tích $a.b$ bằng

A. -15. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 20.

Câu 12. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho tích phân $I=\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}dx=\dfrac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số dương, đồng thời $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$.

A. $P=6$. **B.** $P=5$. **C.** $P=-6$. **D.** $P=4$.

Câu 13. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\sin 2x\mathrm{d}x$. Tìm đẳng thức đúng?

A. $I=-(x-1)\cos 2x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

B. $I=-\dfrac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

C. $I=-\dfrac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

D. $I=-(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

Câu 14. **(Chuyên KHTN 2019)** Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên a,b,c sao cho $\int_2^3 (4x+2)\ln x\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 19. **B.** -19. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 15. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx = a\ln 2 + b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $P = a+4b$.

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=3$ **D.** $P=-3$

Câu 16. Tính tích phân $I = \int_1^{2^{1000}} \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$, ta được

A. $I = -\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} + 1001\ln\frac{2}{1+2^{1000}}$. **B.** $I = -\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}} + \ln\frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

C. $I = \frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} - 1001\ln\frac{2}{1+2^{1000}}$. **D.** $I = \frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}} - \ln\frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

Câu 17. Biết $\int_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{d}x = \mathrm{a.lnb}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a+7b$.

A. $6a+7b=33$. **B.** $6a+7b=25$. **C.** $6a+7b=42$. **D.** $6a+7b=39$.

Câu 18. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Biết rằng $\int_1^a \ln x dx = 1+2a,\ (a>1)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a\in(18;21)$. **B.** $a\in(1;4)$. **C.** $a\in(11;14)$. **D.** $a\in(6;9)$.

Câu 19. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x\mathrm{d}x = a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 20. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh -2019)** Tính tích phân $I = \int_1^2 xe^x dx$.

A. $I=e^2$. **B.** $I=-e^2$. **C.** $I=e$. **D.** $I=3e^2-2e$.

Câu 21. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Biết rằng $\int_2^3 x\ln x\mathrm{d}x = m\ln 3 + n\ln 2 + p$ trong đó $m,n,p\in\mathbb{Q}$. Tính $m+n+2p$

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Câu 22. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Biết $\int_0^2 2x\ln(1+x)\mathrm{d}x = a.\ln b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a+4b$.

A. 42. **B.** 21. **C.** 12. **D.** 32.

Câu 23. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{b}{c} + a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a+3b+c$.

A. $P=6$ **B.** $P=-6$ **C.** $P=5$ **D.** $P=4$

Câu 24. Biết $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$. Khi đó, giá trị của a^2+b bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 9.

Câu 25. Cho $\int\ln\left(x^2-x\right)dx=F\left(x\right),F\left(2\right)=2\ln 2-4$. Khi đó $I=\int\limits_{2}^{3}\left[\frac{F\left(x\right)+2x+\ln\left(x-1\right)}{x}\right]dx$ bằng

A. $3\ln 3-3$. **B.** $3\ln 3-2$. **C.** $3\ln 3-1$. **D.** $3\ln 3-4$

Câu 26. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Biết $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b$.

A. $T=9$. **B.** $T=13$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Câu 27. **(Thpt Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho $\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln\left(1+2x\right)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+2\left(b+c\right)$ là:

A. 0. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 28. Cho $\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x^2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P=ab$.

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=0$. **C.** $P=\frac{-9}{2}$. **D.** $P=-3$.

Câu 29. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int\limits_{0}^{1}(x-2)e^x\mathrm{d}x=a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 30. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\left(\sin x+2\cos x\right)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$ **B.** $\frac{5}{8}$ **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{17}{8}$

Câu 31. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Biết $\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a,b,c,d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc-ad$.

A. 12. **B.** 1. **C.** 24. **D.** 64.

Câu 32. **(THPT Yên Khánh A 2018)** Cho $\int\limits_{0}^{2}\frac{x+\ln\left(x+1\right)}{\left(x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ln 3$ (với $a,c\in\mathbb{Z};b,d\in\mathbb{N}^*;\frac{a}{b}\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $P=\left(a+b\right)\left(c+d\right)$.

A. 7. **B.** -7. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 33. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}$ và $f'\left(x\right)=\dfrac{x}{\left(x+1\right)^2}$ với $x>-1$. Biết $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a\ln\dfrac{b}{c}-d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương, $b\le 3$ và $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

PHẦN 3: DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI – XUẤT SẮC

Dạng 1. Tích phân Hàm ẩn

Dạng 1.1 Giải bằng phương pháp đổi biến

Thông thường nếu trong bài toán xuất hiện $\int_a^b f\left[u(x)\right]\mathrm{d}x$ thì ta sẽ đặt $u(x)=t$

Câu 1. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x=9$. Tích phân $\int_0^2\left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 27. **C.** 75. **D.** 21.

Câu 2. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=7, \int_2^{10} f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính $P=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $P=6$. **B.** $P=-6$. **C.** $P=3$. **D.** $P=12$.

Câu 3. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho $I=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=26$. Khi đó $J=\int_0^2 x\left[f\left(x^2+1\right)+1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 13. **C.** 54. **D.** 52.

Câu 4. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2$. Tích phân $I=\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. $I=8$. **B.** $I=6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=10$.

Câu 5. **(THPT Cẩm Giàng 2019)** Cho biết $\int_{-1}^5 f(x)\mathrm{d}x=15$. Tính giá trị của $P=\int_0^2\left[f(5-3x)+7\right]\mathrm{d}x$.

A. $P=15$. **B.** $P=37$. **C.** $P=27$. **D.** $P=19$.

Câu 6. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=2018$. Tính tích phân $I=\int_0^2\left[f(2x)+f(4-2x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=2018$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1009$.

Câu 7. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-6;6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=8$; $\int_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $I=\int_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x$ là

A. $I=5$. **B.** $I=2$. **C.** $I=14$. **D.** $I=11$.

Câu 8. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\pi^2} f(x)\mathrm{d}x=2018$, tính $I=\int_0^{\pi} xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1008$. **B.** $I=2019$. **C.** $I=2017$. **D.** $I=1009$.

Câu 9. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Khi đó $\int_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Câu 10. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho $\int_1^2 f\left(x^2+1\right)x\mathrm{d}x=2$. Khi đó $I=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** −1.

Câu 11. Cho f,g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3 f(4-x)\mathrm{d}x+2\int_1^2 g(2x-1)\mathrm{d}x$

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^2 f(3x+1)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_0^7 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=16$. **B.** $I=18$. **C.** $I=8$. **D.** $I=20$.

Câu 13. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=f(10-x)$ và $\int_3^7 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_3^7 xf(x)\mathrm{d}x$.

A. 80. **B.** 60. **C.** 40. **D.** 20.

Câu 14. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x)\cos 3x\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=9$. **C.** $I=3$. **D.** $I=2$.

Câu 15. **(Chuyên Quốc Học Huế -2019)** Cho tích phân $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=32.$ Tính tích phân $J=\int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x.$

A. $J=32$ **B.** $J=64$ **C.** $J=8$ **D.** $J=16$

Câu 16. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3)\mathrm{d}x$ là

A. 0. **B.** 24. **C.** 27. **D.** 3.

Câu 17. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 f(2x)dx=2$ .Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. 8. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 18. Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(2017x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2017}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2017$. **D.** $I=1$.

Câu 19. Cho tích phân $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=a$. Hãy tính tích phân $I=\int\limits_0^1 xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=4a$. **B.** $I=\dfrac{a}{4}$. **C.** $I=\dfrac{a}{2}$. **D.** $I=2a$.

Câu 20. **(Thpt Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_e^{e^2} \dfrac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=2$. Tính $\int\limits_{\frac{1}{4}}^2 \dfrac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 21. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+3x^2;x\ge 1\\5-x;x<1\end{cases}$. Tính $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x+3\int\limits_0^1 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{71}{6}$. **B.** $I=31$. **C.** $I=32$. **D.** $I=\dfrac{32}{3}$.

Câu 22. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình- 2019)** Cho $I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$. Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin xf\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** -2.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int\limits_1^4 f\left(x\right)dx=5$ và $\int\limits_4^5 f\left(x\right)dx=20$. Tính $\int\limits_1^2 f\left(4x-3\right)dx-\int\limits_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}\right)e^{2x}dx$.

A. $I=\dfrac{15}{4}$. **B.** $I=15$. **C.** $I=\dfrac{5}{2}$. **D.** $I=25$.

Câu 24. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)dx$.

A. $I=\dfrac{e^4-1}{4}$. **B.** $I=\dfrac{2e-1}{2}$. **C.** $I=e^4-2$. **D.** $I=e^4-1$.

Câu 25. **(Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(2x\right)=3f\left(x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$ **B.** $I=6$ **C.** $I=3$ **D.** $I=2$

Câu 26. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx = 2$ và $\int\limits_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx = 2$. Tính $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f\left(2x\right)}{x}dx$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 27. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x.f(\cos^2 x)dx = \int\limits_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx = 6$. Tính tích phân $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x}dx$

A. 4 **B. 6** **C. 7** **D. 10**

Câu 28. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_0^{2018} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 1$. Tính $I = \int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 4$.

Câu 30. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{16} \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{f\left(4x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 3$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

Câu 31. **(SGD - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right) = \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I = \int\limits_3^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 3+2\ln^2 2$. **B.** $I = 2\ln^2 2$. **C.** $I = \ln^2 2$. **D.** $I = 2\ln 2$.

Câu 32. **(Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I = \int\limits_3^4 f(x)dx$.

A. $I = 3+2\ln^2 2$. **B.** $I = 2\ln^2 2$. **C.** $I = \ln^2 2$. **D.** $I = 2\ln 2$.

Câu 33. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn $[-2;2]$. Biết rằng $\int_{-1}^{0} f(x)dx=-1, \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(-2x)dx=2$ .Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_{-2}^{2} f(x)dx=2\int_{0}^{2} f(x)dx$.

B. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx=-4$.

C. $\int_{0}^{1} f(x)dx=-1$.

D. $\int_{0}^{2} f(x)dx=-3$.

Câu 34. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1)=1$ và $\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$. Tính $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{4}{3}$.

B. $I=\frac{2}{3}$.

C. $I=-\frac{2}{3}$

D. $I=\frac{1}{3}$.

Câu 35. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{1}^{9} \frac{f\ \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4, \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\ \sin x\ \cos x\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int_{0}^{3} f\ x\ \mathrm{d}x$.

A. $I=6$.

B. $I=4$.

C. $I=10$.

D. $I=2$.

Câu 36. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=f(2020-x)$ và $\int_{3}^{2017} f(x)\mathrm{d}x=4.$ Khi đó $\int_{3}^{2017} xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 16160.

B. 4040.

C. 2020.

D. 8080.

Câu 37. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=2$ và $\int_{0}^{1} x^2 f'(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{4} \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f\left(2-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=4$. Giá trị của $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{3}{7}$.

D. $\frac{1}{7}$.

Câu 38. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $4xf(x^2)+6f(2x)=\frac{3}{5}x^3+4$. Giá trị $\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{52}{25}$.

B. 52.

C. $\frac{48}{25}$.

D. 48.

Câu 39. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16, \int_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_{0}^{2} xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 30.

B. 28.

C. 36.

D. 16.

Câu 40. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$

A. $I = \frac{5}{2}\pi$. **B.** $I = 10\pi$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 5\pi$.

Câu 41. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x^2)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 42. **(Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x) + x.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x$. Giá trị tích phân $I = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2+x}dx$ bằng:

A. $\frac{8}{9}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Dạng 1.2 Giải bằng phương pháp từng phần

Thông thường nếu bài toán xuất hiện $\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$ ta sẽ đặt $\begin{cases} u = g(x) \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases}$

Câu 43. **(Đề tham khảo 2017)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -12$ **B.** $I = 8$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = -8$

Câu 44. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và $\int_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\int_0^3 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{25}{3}$. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -9.

Câu 45. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và $\int_0^1 xf(4x)dx = 1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 8. **B.** 14. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** -16.

Câu 46. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\int_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Câu 47. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int_0^1 xf(5x)dx=1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 15 **B.** 23 **C.** $\frac{123}{5}$ **D.** -25

Câu 48. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $f(1)=-\frac{1}{18}$, $\int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{36}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{36}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $-\frac{1}{36}$.

Câu 49. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=e^2$ và $f'(x)=\frac{2x-1}{x^2}e^{2x}$ với mọi x khác 0. Khi đó $\int_1^{\ln 3} xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $6-e^2$. **B.** $\frac{6-e^2}{2}$. **C.** $9-e^2$. **D.** $\frac{9-e^2}{2}$.

Câu 50. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16, \int_0^2 f(x)dx=4$. Tính $I=\int_0^1 xf'(2x)dx$.

A. $I=20$ **B.** $I=7$ **C.** $I=12$ **D.** $I=13$

Câu 51. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $f\ x$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx=-\frac{1}{21}$, $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{1}{7}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{12}$. **B.** $-\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $-\frac{7}{10}$.

Câu 52. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1, f(1)=\cot 1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 [f(x)\tan^2 x+f'(x)\tan x]\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** $1-\ln(\cos 1)$. **C.** 0. **D.** $1-\cot 1$.

Câu 53. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$ Tính $\int_0^1 x^3 f'(x)dx$.

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** -3

Câu 54. Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)dx=2\pi^2+\frac{\pi}{2}-1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\le 0$. **B.** $0<m\le 3$. **C.** $3<m\le 6$. **D.** $m>6$.

Câu 55. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$

A. 4 **B.** $\frac{7}{5}$ **C.** 1 **D.** $\frac{7}{4}$

Câu 56. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{1}{\pi}$.

Câu 57. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Câu 58. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=36$ và $\int_0^1 x.f(x)dx=\frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 4 **D.** $\frac{2}{3}$

Câu 59. **(Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=3$, $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx=4$ và $\int_0^2 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2}{115}$ **B.** $\frac{297}{115}$ **C.** $\frac{562}{115}$ **D.** $\frac{266}{115}$

Câu 60. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=5$ và $\int_0^1 x.f(x)dx=-\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{15}{19}$ **B.** $\frac{17}{4}$ **C.** $\frac{17}{18}$ **D.** $\frac{15}{4}$

Câu 61. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=6$, $\int_0^2 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x = \frac{17}{2}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 8 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 5

Câu 62. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=6$, $\int_0^3 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x = \frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{53}{5}$ **B.** $\frac{117}{20}$ **C.** $\frac{153}{5}$ **D.** $\frac{13}{5}$

Câu 63. **(Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 8$ và $\int_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x = 10$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{2}{285}$ **B.** $\frac{194}{95}$ **C.** $\frac{116}{57}$ **D.** $\frac{584}{285}$

Câu 64. **(Bắc Giang - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2-\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}-2$. **C.** $I=\frac{\mathrm{e}}{2}$. **D.** $I=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Câu 65. **(Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\mathrm{d}x$

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

Câu 66. **(Chuyên Vinh - 2018).** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 67. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x}\mathrm{d}x = 1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x.\tan x.f(x)]\mathrm{d}x = 2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Câu 69. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Câu 70. **(THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\mathrm{e}-2$. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Câu 71. **(Sở Phú Thọ - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Câu 72. **(THPT Quảng Yên - Quảng Ninh - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn: $f(1)=0$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2.f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{7}{5}$. **C.** $I=4$. **D.** $I=\frac{7}{4}$.

Câu 73. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=3$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \frac{4}{11}$ và $\int_0^1 x^4 f(x)dx = \frac{7}{11}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ là

A. $\frac{35}{11}$. **B.** $\frac{65}{21}$. **C.** $\frac{23}{7}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 74. **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2 \left(f'(x)\right)^2 dx = \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$. **B.** $\ln\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{3}{4}-2\ln\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$.

Câu 75. **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\frac{4}{3}-\ln 3$ và $\int_0^1 \frac{4f(x)}{(2x+1)^2}dx=2\ln 3-\frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{f(x)}{4}dx$ bằng.

A. $\frac{1-3\ln 3}{3}$. **B.** $\frac{4-\ln 3}{3}$. **C.** $\frac{-\ln 3}{16}$. **D.** $-\ln\frac{3}{16}$.

Câu 76. **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$; $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\frac{1}{30}$ và $\int_0^1 (2x-1)f(x)\,dx=-\frac{1}{30}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{11}{30}$. **B.** $\frac{11}{12}$. **C.** $\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Câu 77. **(Sở Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx=\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\,dx=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\,dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2)=16$ và $\int_0^2 f(x)dx=4$. Tích phân $\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. 112. **B.** 12. **C.** 56. **D.** 144.

Câu 79. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16, \int_0^2 f(x)\,dx=4$. Tính $I=\int_0^1 x.f'(2x)\,dx$.

A. 7. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 13.

Câu 80. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\,dx=10$, $f(1)=\cot 1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 [f(x)\tan^2 x+f'(x)\tan x]\,dx$.

A. $1-\ln(\cos 1)$. **B.** -1. **C.** -9. **D.** $1-\cot 1$.

Câu 81. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=0$, $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx=\frac{7}{6}$ và $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx=-\frac{7}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\,dx$ bằng:

A. $-\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{-97}{30}$. **C.** $\frac{7}{6}$. **D.** $\frac{-7}{6}$.

Câu 82. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - lần 3 - 2019)** Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục trên **(0; 1)** thỏa mãn f(0) = 0 và $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{9}{2}$; $\int_0^1 f'(x).\cos\frac{\pi x}{2}\,dx=\frac{3\pi}{4}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng:

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{6}{\pi}$. **D.** $\frac{4}{\pi}$.

Câu 83. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ sao cho $f(1)=1$ và $f(x).f(1-x)=e^{x^2-x}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $I=\int_0^1\frac{(2x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$.

A. $I=-\frac{1}{60}$. **B.** $I=\frac{1}{10}$. **C.** $I=-\frac{1}{10}$. **D.** $I=\frac{1}{10}$.

Câu 84. **(Sở Nam Định-2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn: $f(2)=0,\int_1^2(f'(x))^2dx=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$. **B.** $\ln\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}-2\ln\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=3,\int_0^1[f'(x)]^2dx=\frac{4}{11}$ và $\int_0^1 x^4f(x)dx=\frac{7}{11}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ là:

A. $\frac{35}{11}$. **B.** $\frac{65}{21}$. **C.** $\frac{23}{7}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $\int_1^2(x-2)^2f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{21}$, $f(1)=0$, $\int_1^2[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{7}$. Tính $\int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{-19}{60}$. **B.** $\frac{7}{120}$. **C.** $\frac{-1}{5}$. **D.** $\frac{13}{30}$.

Câu 87. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=f'(1)=1$ và $f(1-x)+x^2.f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{2}{3}$.

Dạng 1.3 Biến đổi

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=[u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)\Leftrightarrow[u(x)f(x)]'=h(x)$

Suy ra $u(x)f(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta dược $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

Suy ra $e^x\cdot f(x)=\int e^x\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x)-f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta duroc $e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x}\cdot f(x)=\int e^{-x}\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúrc $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=h(x)$
(Phương trình vi phân tuyên tinh cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+p(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot f(x)=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\Leftrightarrow\left[f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\right]'=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)}+p(x)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-p(x)$

Suy ra $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln|f(x)|=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot[f(x)]^n=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n}+p(x)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{[f(x)]^n}=-p(x)$

Suy ra $\int\frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1}=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Câu 88. **(Mã 102 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $-\frac{7}{6}$ **D.** $-\frac{11}{6}$

Câu 89. **(Mã 104 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$ **B.** $-\frac{71}{20}$ **C.** $-\frac{79}{20}$ **D.** $-\frac{4}{5}$

Câu 90. **(Minh họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn $xf\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x$?

A. $\frac{-17}{20}$. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1-x)=6x^2f(x^3)-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

A. $-\dfrac{\ln 2}{2}-1$. **B.** $-\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\ln 2-\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{\ln 2}{2}-\dfrac{3}{2}$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+(x^2-1)f\left(\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{7}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\dfrac{19}{3}$.

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $(f'(x))^2+4(6x^2-1).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4,\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\dfrac{23}{15}$. **B.** $\dfrac{13}{15}$. **C.** $-\dfrac{17}{15}$. **D.** $-\dfrac{7}{15}$.

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{-4}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{-10}{3}$

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3,\forall x\in[2;4]$, $f(2)=\dfrac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\dfrac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa $f(1)=0$, $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2-32x+28$ với mọi x thuộc $[0;2]$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{14}{3}$.

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{3}{4}+2\ln 2$. **B.** $3+\ln 2$. **C.** $\dfrac{3}{4}+\ln 2$. **D.** $\dfrac{3}{2}+2\ln 2$.

Câu 99. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=2\left(x-1\right)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Câu 100. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf\left(x^5\right)+f\left(1-x^4\right)=x^{11}+x^8+x^6-3x^4+x+3,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{35}{6}$. **B.** $-\frac{15}{4}$. **C.** $-\frac{7}{24}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 101. Cho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\left[\frac{2}{5};1\right]$ và thỏa mãn $2f\ x+5f\left(\frac{2}{5x}\right)=3x,\forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$. Khi đó $I=\int\limits_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}}\ln 3x.f'\ 3x\ dx$ bằng:

A. $\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}+\frac{3}{35}$. **B.** $\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$. **C.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$. **D.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}+\frac{3}{35}$.

Câu 102. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+2xf\left(x^2\right)=2x^7+3x^3-x-1$ với $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 xf'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 103. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$x^2f\left(1-x\right)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x},\forall x\neq 0,x\neq 1$. Khi đó $\int\limits_{-1}^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 104. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right)+\left(x^2-1\right)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\frac{19}{3}$.

Câu 105. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[-1;2\right]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf\left(3-x^2\right)$.

Tích phân $I=\int\limits_{-1}^2 f(x)dx$ bằng

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{28}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Câu 106. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1, f'(x)<0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0;1]$. Giá trị $f(0)-f(1)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 107. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in R$ và $f(0)=f'(0)=2$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$

A. $\frac{160}{15}$ **B.** $\frac{268}{15}$ **C.** $\frac{4}{15}$ **D.** $\frac{268}{30}$

Câu 108. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $f\ x$ là hàm số liên tục trên tập xác đinh $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn $f\ x^2+3x+1 = x+2$. Tính $I=\int_1^5 f\ x\ \mathrm{d}x$

A. $\frac{37}{6}$. **B.** $\frac{527}{3}$. **C.** $\frac{61}{6}$. **D.** $\frac{464}{3}$.

Câu 109. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện $f(x)+x\left(f'(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x, x\in R$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x)dx$

A. 0. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 1. **D.** π.

Câu 110. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=\frac{2}{3}$ và $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)f'(x)=1, \forall x \geq -1$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx = \frac{a\sqrt{2}+b}{15}$ với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính $T=a+b$.

A. -8. **B.** -24. **C.** 24. **D.** 8.

Câu 111. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 112. (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết $f(3)=3$ và $xf'(2x+1)-f(2x+1)=x^3, \forall x \in (0;+\infty)$. Giá trị của $\int_3^5 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{914}{3}$. **B.** $\frac{59}{3}$. **C.** $\frac{45}{4}$. **D.** 88.

Câu 113. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $[1;4]$, thỏa mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2$ với mọi $x\in[1;4]$. Biết $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)dx$

A. $\frac{1188}{45}$. **B.** $\frac{1187}{45}$. **C.** $\frac{1186}{45}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 114. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn: $7f(x)+4f(4-x)=2018x\sqrt{x^2+9}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{2018}{11}$. **B.** $\frac{7063}{3}$. **C.** $\frac{98}{3}$. **D.** $\frac{197764}{33}$.

Câu 115. (THPT Ba Đình 2019) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x)=(x^2+3)f(x+1)$. Biết rằng $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\int_0^2(2x-1)f''(x)dx$.

A. 8. **B.** 0. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x,\forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x)dx$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 2 **D.** 4

Câu 117. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)\left[f(x)\right]^2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x);\forall\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=ae^2+b,(a,b\in\mathbb{Q})$.Giá trị của $a-b$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 119. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0$ và $f(x)-f'(x)=-\frac{2\left[f(x)\right]^2}{e^x.x.\sqrt{x-x^2}}$ $\forall x\in(0;1)$. Biết $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{5}\right)\geq\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{6}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{5}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{4}$ **D.** $f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{6}$

Câu 120. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int_0^1\left[2f(x)+3x\right]f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\left[4f(x)+x\right]\sqrt{xf(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{24}$ **B.** $-\frac{1}{8}$ **C.** $-\frac{1}{12}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Câu 121. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x = a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 122. (Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

Câu 123. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xá định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 124. (THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018) Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{2a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$. **C.** $I=\frac{a}{3}$. **D.** $I=a$.

Câu 125. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 126. (Hà Tĩnh - 2018) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2-f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$. Biết $f(0)=1$, $f(2)=e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. e^2. **B.** $e^{\frac{3}{2}}$. **C.** e^3. **D.** $e^{\frac{5}{2}}$.

Câu 127. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$; $f(3-x).f(x)=1, f(x)\neq -1$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân: $\int_0^3\frac{x.f'(x)}{\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)}dx$.

A. 1. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 128. **(Sở Bình Phước - 2018)** Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$. **C.** $I=a$. **D.** $I=\frac{2a}{3}$.

Câu 129. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $f(x+1)=f(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2},\ \forall x\neq 0$. Gọi $I=\int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1}.\mathrm{d}x$. Hãy chọn khẳng định đúng về giá trị của I.

A. $I\in(-1;0)$. **B.** $I\in(1;2)$. **C.** $I\in(0;1)$. **D.** $I\in(-2;-1)$.

Câu 130. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x)dx=2$ và $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f^2(x)dx$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{34}{5}$. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 131. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $f(x)>0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và $f(0)=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f(3)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(4\ln 2-\ln 5)^2$. **B.** $4(4\ln 2-\ln 5)^2$. **C.** $\frac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2$. **D.** $2(4\ln 2-\ln 5)^2$.

Câu 132. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=\frac{2x+1}{2x}\ln(x+1)$. Biết $\int_1^{17} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 5-2\ln b+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+b+2c$ bằng

A. $\frac{29}{2}$. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 37.

Câu 133. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $6x^2f(x^3)+4f(1-x)=3\sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{8}$. **B.** $\frac{\pi}{20}$. **C.** $\frac{\pi}{16}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 134. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4x)=f(x)+4x^3+2x$ và $f(0)=2$. Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{147}{63}$. **B.** $\frac{149}{63}$. **C.** $\frac{148}{63}$. **D.** $\frac{352}{63}$.

Câu 135. (Kìm Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Câu 136. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thảo mãn $\sin x\, f(\cos x)+\cos x\, f(\sin x)=\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{18}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 137. (Chuyên Lam Sơn 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$. Biết $f(0)=2\mathrm{e}$ và $f(x)$ thỏa mãn hệ thức $f'(x)+\sin x.f(x)=\cos x.\mathrm{e}^{\cos x}, \forall x\in[0;\pi]$. Tính $I=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $I\approx 6,55$. **B.** $I\approx 17,30$. **C.** $I\approx 10,31$. **D.** $I\approx 16,91$.

Câu 138. (Chuyên Thái Bình - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trí $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 139. (THPT Cẩm Bình 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $I=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $12\ln 13-13$. **B.** $13\ln 13-12$. **C.** $12\ln 13+13$. **D.** $13\ln 13+12$.

Câu 140. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 141. (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ (1). Biết $f(2)=a+b.\ln 3$ $(a,\ b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $2\left(a^2+b^2\right)$ là:

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 142. (Sở Cần Thơ - 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x)\neq 0,\forall x\in[1;3]$; $f'(x)\left[1+f(x)\right]^2=(x-1)^2\left[f(x)\right]^4$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int\limits_e^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b(a,b\in\mathbb{Z})$, giá trị của $a+b^2$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 143. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1$, $\left(f'(x)\right)^3=e^x\left(f(x)\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Tính $f(3)$

A. $f(3)=1$. **B.** $f(3)=e^2$. **C.** $f(3)=e^3$. **D.** $f(3)=e$.

Câu 144. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x)=\left(x^2+3\right).f(x+1)\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\int_0^2(2x-1)f''(x).\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 0. **C.** 8. **D.** -4.

Câu 145. (Sở Nam Định - 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2+4,\forall x\in[0;1]$ và $f(1)=2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Câu 146. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x)=\frac{2f(x)}{x}+2x^3$, $\forall x\in(0;+\infty)$ và $\int\limits_2^3\frac{x^5}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{20}$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(3)$ bằng

A. 110. **B.** 90. **C.** 20. **D.** 25.

Câu 147. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\geq x^{2018}$, $\forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2018.2020}$. **B.** $\frac{1}{2019.2020}$. **C.** $\frac{1}{2020.2021}$. **D.** $\frac{1}{2019.2021}$.

Câu 148. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+3x+2$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 149. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)e^{x^2-2x+1}+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=e+2$. **B.** $I=2e+4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=8$.

Câu 150. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\ \forall x\in[2;4]$. Biết rằng

$f(2)=\frac{7}{4}$ và $4x^3 f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3,\ \forall x\in[2;4]$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **B.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 151. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[e;e^2\right]$. Biết $x^2 f'(x)\cdot\ln x-xf(x)+\ln^2 x=0,\forall x\in\left[e;e^2\right]$ và $f(e)=\frac{1}{e}$. Tính tích phân $I=\int_e^{e^2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\ln 2$.

Dạng 2. Tích phân một số hàm đặc biệt

Dạng 2.1 Tích phân của hàm số lẻ và hàm số chẵn

Nhắc lại kiến thức về hàm số lẻ và hàm số chẵn:

Hàm số $y=f(x)$ có miền xác định trên tập đối xứng D và

Nếu $f(-x)=f(x),\ \forall x\in D\Rightarrow y=f(x)$: là hàm số chẵn.

Nếu $f(-x)=-f(x),\forall x\in D\Rightarrow y=f(x)$: là hàm số lẻ.

(thay thế chỗ nào có x bằng $-x$ sẽ tính được $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$).

Thường gặp cung góc đối nhau của $\cos(-x)=\cos x,\ \sin(-x)=-\sin x$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và lẻ trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x).dx=0$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và chẵn trên $[-a;a]$ thì $\begin{cases}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx\\ \int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx\end{cases}$.

Do những kết quả này không có trong SGK nên về mặt thực hành, ta làm theo các bước sau (sau khi nhận định đó là hàm chẵn hoặc lẻ và **bài toán thường có cận đối nhau** dạng $-a\to a$):

□ Bước 1. Phân tích: $I=\int_{-a}^{a} f(x).dx=\int_{-a}^{0} f(x).dx+\int_0^a f(x).dx=A+B$.

□ Bước 2. Tính $A=\int_{-a}^{0} f(x).dx$? bằng cách đổi biến $t=-x$ và cần nhớ rằng: tích phân không phụ thuộc vào biến, mà chỉ phụ thuộc vào giá trị của hai cận, chẳng hạn luôn có: $\int_{-2014}^{0}\frac{3t^2\cos t}{1+\sin^2 t}dt=\int_{-2014}^{0}\frac{3x^2\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

2. Tích phân của hàm số liên tục

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thì

+ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

+ $\int_a^{\pi-a} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_a^{\pi-a} f(\sin x)dx$ và $\int_0^{\pi} x.f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

+ $\int_a^{2\pi-a} xf(\cos x)dx = \pi\int_a^{2\pi-a} f(\cos x)dx$ và $\int_0^{2\pi} x.f(\cos x)dx = \pi\int_0^{2\pi} f(\cos x)dx$

$\longrightarrow$ Về mặt thực hành, sẽ đặt $x =$ cận trên + cận dưới $- t$ $(x = a+b-t)$. Từ đó tạo tích phân xoay vòng (tạo ra I), rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ và $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$.

Lưu ý: Hàm số $f(x)$ có chu kỳ T thì $f(x+T) = f(x)$.

$\longrightarrow$ Về mặt thực hành, ta sẽ làm theo các bước sau:

Bước 1. Tách: $I = \int_a^{a+T} f(x)dx = \underbrace{\int_a^0 f(x)dx}_{A} + \underbrace{\int_0^T f(x)dx}_{B} + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x)dx}_{C}$ (i)

Bước 2. Tính $C = \int_T^{a+T} f(x)dx$?

Đặt $x = t+T \Rightarrow dx = dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = a+T \\ x = T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = a \\ t = 0 \end{cases}$. Khi đó:

$C = \int_0^a f(t+T)dt = -\int_a^0 f(t)dt = -\int_a^0 f(x)dx = -A$ (ii)

Thế (i) vào (ii) ta được: $I = B = \int_0^T f(x)dx$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(-x) = \sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $I = -6$ **B.** $I = 0$ **C.** $I = -2$ **D.** $I = 6$

Câu 2. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x = \pi\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{c}$, với $a,b,c \in \mathbb{N}$, $b < 15$. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 3. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a;a]$ và $k > 0$. Giá trị tích phân $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $2\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 4. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho $f(x)$, $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{x^2+4}$. Biết $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx=\dfrac{\pi}{m}$. Khi đó giá trị của m là

A. $m=2$. **B.** $m=20$. **C.** $m=5$. **D.** $m=10$.

Câu 5. **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa -2019)** Cho hàm số $f(x)$, $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thõa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính $I=\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\pi}{20}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{10}$. **C.** $I=\dfrac{-\pi}{20}$. **D.** $I=\dfrac{-\pi}{10}$.

Câu 6. **(Hà Nội - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_1^2 f(-2x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

Câu 7. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{e^x+1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ $(a;b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Câu 8. **(Chuyên ĐH Vinh - 2018)** Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của $\int_{-2}^{2}\dfrac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_{-2}^{2}\dfrac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=\dfrac{10}{3}$. **C.** $I=20$. **D.** $I=5$.

Câu 10. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\int_{-1}^{1} f(x)dx=6$. Kết quả của $\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{1+2018^x}dx$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 11. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0, \forall x\in[0;a] \end{cases}$ và $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Câu 12. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Tích phân $\int_{-2}^{2} \frac{x^{2020}}{e^x+1}.\mathrm{d}x=\frac{2^a}{b}$. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=0$. **B.** $S=2021$. **C.** $S=2020$. **D.** $S=4042$.

Câu 13. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3,\ (a,b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-2$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Câu 14. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_0^1 f(x)dx=2$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+2019^x}dx$ là

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Dạng 2.2 Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

Tính tích phân: $I=\int_a^b |f(x)|.dx$?

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Giả sử trên đoạn $[a;b]$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_o\in[a;b]$ và có bảng xét dấu sau:

x		a	x_o	b	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Bước 2. Dựa vào công thức phân đoạn và dấu của trên $[a;x_o],[x_o;b]$ ta được:

$$I=\int_a^b |f(x)|.dx=\int_a^{x_o} f(x)dx+\int_{x_o}^b [-f(x)]dx=A+B.$$

Sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học tính $A,B\Rightarrow I$.

Câu 15. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int_{-1}^{a} |x|\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\frac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\frac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\frac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\frac{|3a^2-1|}{2}$.

Câu 16. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho số thực $m>1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx-1|dx=1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m\in(4;6)$. **B.** $m\in(2;4)$. **C.** $m\in(3;5)$. **D.** $m\in(1;3)$.

Câu 17. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^{1}|x|^3\,\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int_{-1}^{2018}\left|x^4-x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2018}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-2}^{3}\left|e^x\left(x+1\right)\mathrm{d}x\right|=\int_{-2}^{3}e^x\left(x+1\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

Câu 18. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int_{1}^{5}\left|\frac{x-2}{x+1}\right|dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính P = abc.

A. $P=-36$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-18$ **D.** $P=18$

Câu 19. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Có bao nhiêu số tự nhiên m để $\int_{0}^{2}\left|x^2-2m^2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{0}^{2}\left(x^2-2m^2\right)\mathrm{d}x\right|$.

A. Vô số. **B.** 0. **C.** Duy nhất. **D.** 2.

Câu 20. **(Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\frac{2}{\ln 2}$.

Câu 21. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$; $\int_{0}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$.

Tính $I=\int_{-1}^{1}f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x$

A. $I=8$ **B.** $I=6$ **C.** $I=\frac{3}{2}$ **D.** $I=4$

Câu 22. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_{0}^{3}f(x)dx=8$ và $\int_{0}^{5}f(x)dx=4$.

Tính $\int_{-1}^{1}f(\left|4x-1\right|)dx$.

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 23. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_{0}^{1}f\left(2x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{0}^{2}f\left(6x\right)\mathrm{d}x=14$. Tính $\int_{-2}^{2}f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x$.

A. 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

Câu 24. **(Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(0;3\right)$ và $\int_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2;\int_{0}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=8$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^{1}f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x=?$

A. 6 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_{0}^{3}f(x)dx=8$ và $\int_{0}^{5}f(x)dx=4$. Tính $\int_{-1}^{1}f(\left|4x-1\right|)dx$

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+2f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với mọi số thực x. Giả sử $f(2)=m$, $f(-3)=n$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-2)-f(3)$.

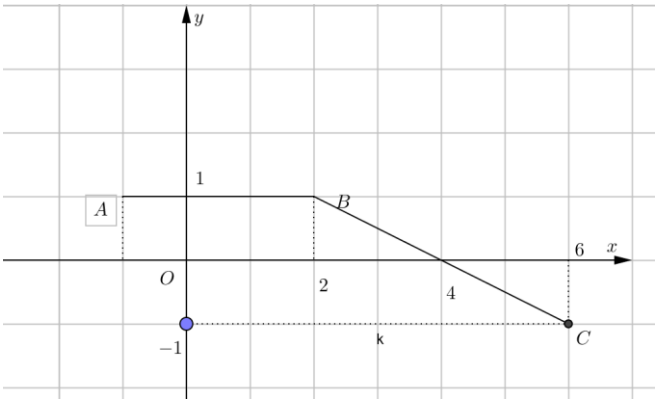
A. $T=m+n$. **B.** $T=n-m$. **C.** $T=m-n$. **D.** $T=-m-n$.

Dạng 2.3 Tích phân nhiều hàm

Câu 27. **(Mã 101-2021-Lần 1)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

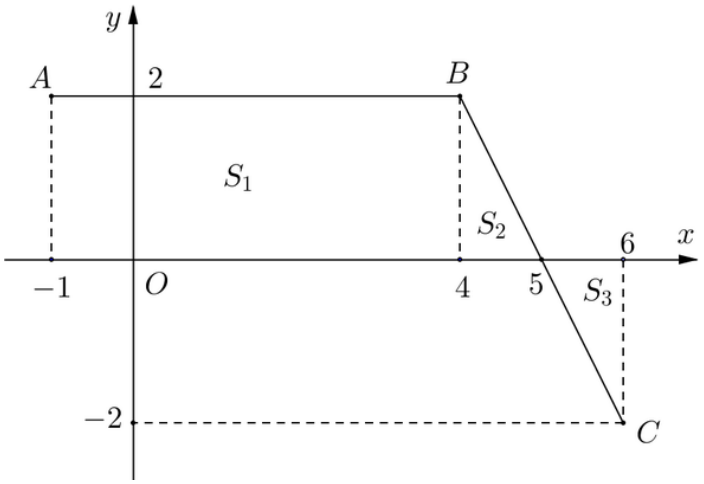
A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Câu 28. **(Mã 101-2021-Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;6]$ và có đồ thị đường gấp khúc ABC như hình bên. Biết F là một nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1)=-1$. Giá trị của $F(4)+F(6)$ bằng



A. 10. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

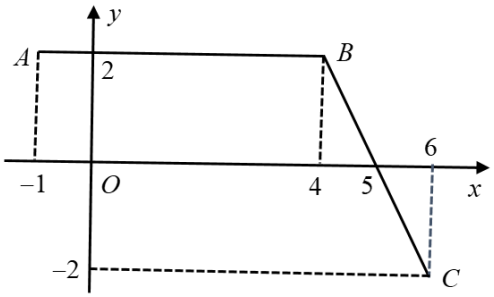
Câu 29. **(Mã 120-2021-Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1)=-2$.



Giá trị của $F(5)+F(6)$ bằng

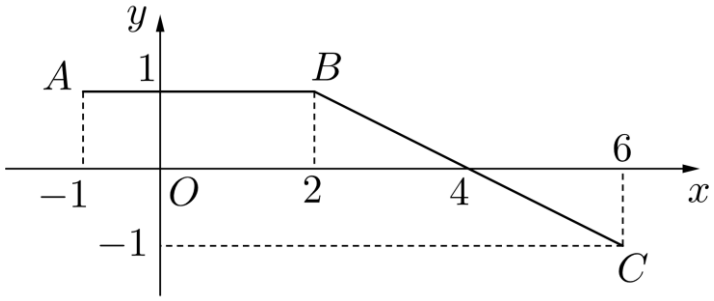
A. 19. **B.** 17. **C.** 22. **D.** 18.

Câu 30. **(Mã 111-2021-Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1)=-1$. Giá trị của $F(5)+F(6)$ bằng



A. 21. **B.** 25. **C.** 23. **D.** 19.

Câu 31. **(Mã 102-2021-Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình bên dưới.



Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1)=-2$. Giá trị của $F(4)+F(6)$ bằng

A. 3. **B.** 4 . **C.** 8 . **D.** 5.

Câu 32. **(Mã 103 - 2021 - Lần 1)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 23. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 21.

Câu 33. **(Mã 102 - 2021 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1 & khi\ x\ge 1\\ 3x^2-2 & khi\ x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 9. **B.** 15. **C.** 11. **D.** 6.

Câu 34. **(Mã 104 - 2021 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+2 & khi\ x\ge 1\\ 3x^2+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 18. **B.** 20. **C.** 9. **D.** 24.

Câu 35. **(Đề Tham Khảo 2021)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & khi\ x\ge 2\\ x^2-2x+3 & khi\ x<2\end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x+1)\cos x\,dx$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+7 & \text{khi } x\ge 2\\ 3x^2-1 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=4$. Giá trị của $F(-2)+3F(4)$ bằng

A. 106. **B.** 110. **C.** 12. **D.** 36.

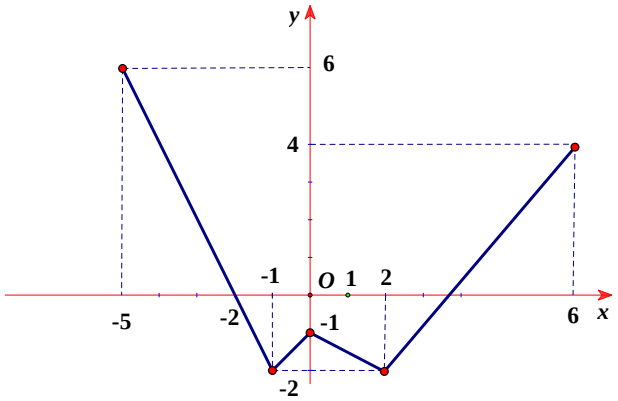
Câu 37. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=|1+x|-|1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Tính tổng $F(0)+F(2)+F(-3)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{khi } x\ge \dfrac{\pi}{4}\\ \cos x & \text{khi } x<\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}$. Giá trị của $F(0)-2F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** -1. **C.** $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 39. **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5;6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int\limits_{-5}^{0} f(x)dx$ bằng.

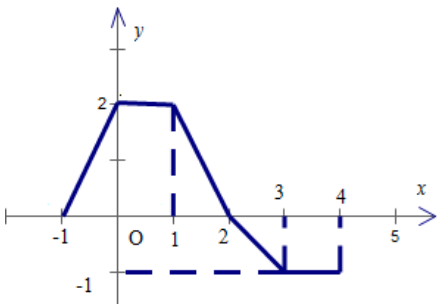


A. $\dfrac{25}{2}$. **B.** $\dfrac{19}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

Câu 40. **(Sở Lào Cai - 2021)** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int\limits_{0}^{m}\left|3x^2-2x\right|dx=m-10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 41. **(THPT Lương Thế Vinh - 2021)** Cho hàm số $y=f(x)$ với $-1\le x\le 4$ có đồ thị các đoạn thẳng như hình bên.



Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** $5,5$. **D.** $2,5$.

Câu 42. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}+m & \text{khi } x\geq 0\\ 2x\sqrt{3+x^{2}} & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\mathrm{e}+2\sqrt{3}-22$. **B.** $I=\mathrm{e}+2\sqrt{3}+\dfrac{22}{3}$. **C.** $I=e-2\sqrt{3}-\dfrac{22}{3}$. **D.** $I=\mathrm{e}+2\sqrt{3}-\dfrac{22}{3}$.

Câu 43. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^{2}-4x-1 & ,x\geq 5\\ 2x-6 & ,x<5\end{cases}$. Tích phân $\int\limits_{0}^{\ln 2} f\left(3e^{x}+1\right).e^{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{77}{3}$. **B.** $\dfrac{77}{9}$. **C.** $\dfrac{68}{3}$. **D.** $\dfrac{77}{6}$.

Câu 44. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x-4 & \text{khi } x\geq 4\\ \dfrac{1}{4}x^{3}-x^{2}+x & \text{khi } x<4\end{cases}$. Tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(2\sin^{2}x+3\right)\sin 2x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{28}{3}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{341}{48}$. **D.** $\dfrac{341}{96}$.

Câu 45. **(Chuyên ĐHSP - 2021)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+1, khi\, x>3\\ ax-3a+7, khi\, x\leq 3\end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int_{0}^{1} f\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2}$ thì a bằng

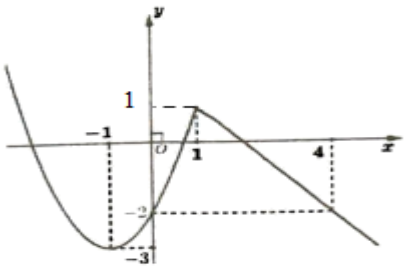
A. $\dfrac{3\mathrm{e}^{2}+4\mathrm{e}-6}{\mathrm{e}-1}$. **B.** $6\mathrm{e}-6$. **C.** $6\mathrm{e}+6$. **D.** $-6\mathrm{e}+6$.

Câu 46. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2021)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^{2}-3x & \text{khi } x\leq 8\\ \dfrac{40}{x-7} & \text{khi } x>8\end{cases}$. Tích phân $I=\int\limits_{e^{2}}^{e^{4}} \dfrac{f\left(\ln^{2}x\right)}{x\ln x}dx$ bằng

A. $36+\dfrac{40}{7}\ln 2+\dfrac{15}{7}\ln 3$. **B.** $-6-\dfrac{20}{7}\ln 2+\dfrac{40}{7}\ln 3$.

C. $36-\dfrac{40}{7}\ln 2+\dfrac{20}{7}\ln 3$. **D.** $6-\dfrac{20}{7}\ln 2+\dfrac{40}{7}\ln 3$.

Câu 47. **(Sở Bạc Liêu - 2021)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left(-\infty;1\right]$ là một phần của Parabol có đỉnh $\left(-1;-3\right)$ và trên $\left(1;+\infty\right)$ đồ thị là một phần của đường thẳng (tham khảo hình vẽ).



Tích phân $I=\int\limits_{1}^{\sqrt{17}} f\left(\sqrt{x^{2}-1}\right)x\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=-\dfrac{73}{12}$. **B.** $I=\dfrac{11}{6}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 2.

Câu 48. **(Chuyên Tuyên Quang - 2021)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-5x+3 & \text{khi } x\geq 7\\ 2x+3 & \text{khi } x<7\end{cases}$. Tích phân $\int\limits_0^{\ln 4} f\left(2\mathrm{e}^x+3\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1148}{3}$. **B.** $\dfrac{220}{3}$. **C.** $\dfrac{115}{3}$. **D.** $\dfrac{287}{3}$.

Câu 49. **(Cụm Ninh Bình – 2021)** Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (x\geq 0)\\ 2\cos x-3 & (x<0)\end{cases}$. Tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|2\cos x-1\right|\right)\sin x\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{-2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{-1}{3}$.

Câu 50. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & khi\ x\leq 0\\ a\left(x-x^2\right) & khi\ x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ bằng:

A. $\dfrac{a}{6}-1$. **B.** $\dfrac{2a}{3}+1$. **C.** $\dfrac{a}{6}+1$. **D.** $\dfrac{2a}{3}-1$.

Câu 51. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+m & \text{khi } x\geq 0\\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Câu 52. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính tích phân $\int\limits_0^1 \max\left\{e^x, e^{1-2x}\right\}dx$

A. $e-1$. **B.** $\dfrac{3}{2}\left(e-\sqrt[3]{e}\right)$. **C.** $e-\sqrt[3]{e}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f\ x\ =\begin{cases}x^2+3 & khi\ x\geq 1\\ 5-x & khi\ x<1\end{cases}$. Tính $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\ \sin x\ \cos x dx+3\int\limits_0^1 f\ 3-2x\ dx$

A. $I=\dfrac{71}{6}$. **B.** $I=31$. **C.** $I=32$. **D.** $I=\dfrac{32}{3}$.