

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Giáo viên: **Đỗ Thế Long**

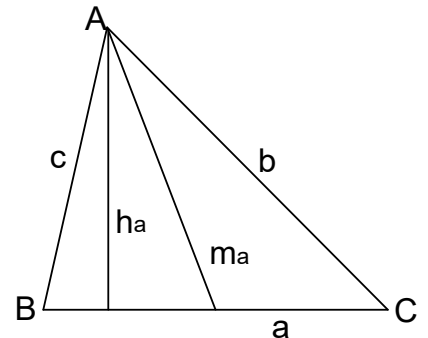
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho $\triangle ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$,

h_a, m_a là đường cao và đường trung tuyến xuất phát từ A .

R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\triangle ABC$

p là nửa chu vi của $\triangle ABC$.



1. ĐỊNH LÝ CÔSIN

Định lý côsin. Trong tam giác ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Hệ quả

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Leftrightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Mở rộng

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

$$m_c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

2. ĐỊNH LÝ SIN

Trong tam giác ABC : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: Giải tam giác.

1. Phương pháp.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau: biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lí côsin và định lí sin ; định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $\hat{A} = 87^\circ$.

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$ và $c = 14$.

Dạng 2: Xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp

- Sử dụng định lí côsin và định lí sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC , và độ dài đường cao kẻ từ A .

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$. Số đo góc \hat{A} bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 2. Tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 1$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = 1$. B. $BC = 2$. C. $BC = \sqrt{2}$. D. $BC = \sqrt{3}$.

Câu 3. Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

- A.** $BC = 3 + 3\sqrt{6}$. **B.** $BC = 3\sqrt{6} - 3$. **C.** $BC = 3\sqrt{7}$. **D.** $BC = \frac{3 + 3\sqrt{33}}{2}$.

Câu 4. Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC

- A.** $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. **B.** $AC = 5\sqrt{3}$. **C.** $AC = 5\sqrt{2}$. **D.** $AC = 10$.

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC

- A.** $AC = \sqrt{3}$. **B.** $AC = \sqrt{2}$. **C.** $AC = 2\sqrt{3}$. **D.** $AC = 2$.

Câu 6. Tam giác ABC có $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài cạnh AM .

- A.** $AM = 4\sqrt{2}$. **B.** $AM = 3$. **C.** $AM = 2\sqrt{3}$. **D.** $AM = 3\sqrt{2}$.

Câu 7. Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc \hat{A} .

Khi đó góc \widehat{ADB} bằng bao nhiêu độ?

- A.** 45° . **B.** 60° . **C.** 75° . **D.** 90° .

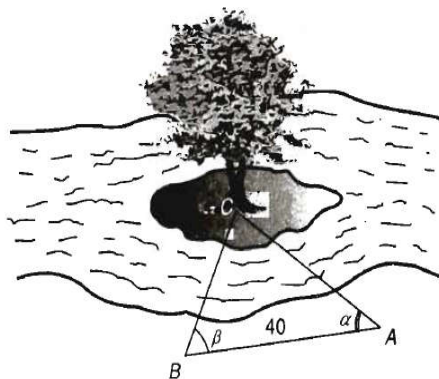
Câu 8. Tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH = 32\text{ cm}$. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?

- A.** 38 cm . **B.** 40 cm . **C.** 42 cm . **D.** 45 cm .

Câu 9. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?

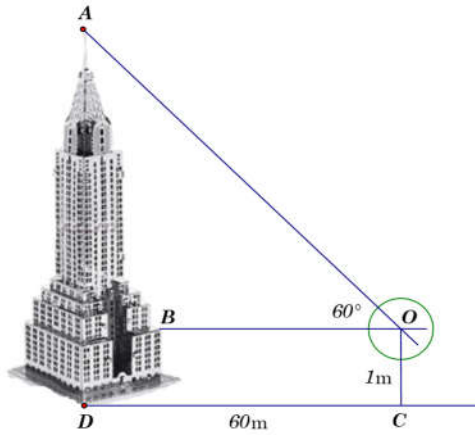
- A.** 61 hải lí **B.** 36 hải lí. **C.** 21 hải lí. **D.** 18 hải lí.

Câu 10. Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{ m}$, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?



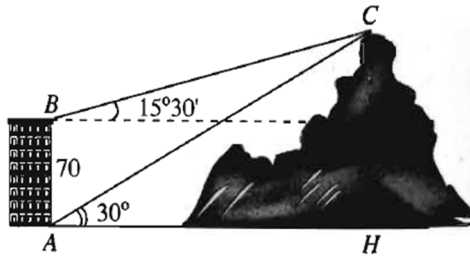
- A.** 53 m. **B.** 30 m. **C.** 41,5 m. **D.** 41 m.

Câu 11. Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{ m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1\text{ m}$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:



- A. 40m B. 114m. C. 105m. D. 110m.

Câu 12. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



- A. 135m. B. 234m. C. 165m. D. 195m.

Câu 13. Tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và $BC = 10\text{cm}$. Độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác bằng:

- A. 4cm. B. $\sqrt{3}\text{cm}$. C. 7cm. D. 5cm.

Câu 14. Tam giác ABC vuông tại A và có $AB = AC = a$. Tính độ dài đường trung tuyến BM của tam giác đã cho.

- A. $BM = 1,5a$. B. $BM = a\sqrt{2}$. C. $BM = a\sqrt{3}$. D. $BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 15. Tam giác ABC cân tại C , có $AB = 9\text{cm}$ và $AC = \frac{15}{2}\text{cm}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C .

Tính độ dài cạnh AD .

- A. $AD = 6\text{cm}$. B. $AD = 9\text{cm}$. C. $AD = 12\text{cm}$. D. $AD = 12\sqrt{2}\text{cm}$.

Câu 16. Tam giác ABC có trọng tâm G . Hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ và $\widehat{BGC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AB .

- A. $AB = \sqrt{11}$. B. $AB = \sqrt{13}$. C. $AB = 2\sqrt{11}$. D. $AB = 2\sqrt{13}$.

Câu 17. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Nếu giữa a, b, c có liên hệ $b^2 + c^2 = 2a^2$ thì độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác tính theo a bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $3a\sqrt{3}$.

Câu 18. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến m_a, m_b, m_c thỏa mãn $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$. Khi đó tam giác này là tam giác gì?

- A. Tam giác cân. B. Tam giác đều. C. Tam giác vuông. D. Tam giác vuông cân.

Câu 19. Tam giác ABC có $BC=10$ và $\widehat{A}=30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A.** $R=5$. **B.** $R=10$. **C.** $R=\frac{10}{\sqrt{3}}$. **D.** $R=10\sqrt{3}$.

Câu 20. Tam giác ABC có $AB=3$, $AC=6$ và $\widehat{A}=60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A.** $R=3$. **B.** $R=3\sqrt{3}$. **C.** $R=\sqrt{3}$. **D.** $R=6$.

Câu 21. Tam giác ABC có $BC=21\text{cm}$, $CA=17\text{cm}$, $AB=10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A.** $R=\frac{85}{2}\text{cm}$. **B.** $R=\frac{7}{4}\text{cm}$. **C.** $R=\frac{85}{8}\text{cm}$. **D.** $R=\frac{7}{2}\text{cm}$.

Câu 22. Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Khi đó bán kính R bằng:

- A.** $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $R=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 23. Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH=\frac{12}{5}\text{cm}$ và $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A.** $R=\sqrt{3}\text{cm}$. **B.** $R=1,5\text{cm}$. **C.** $R=2\text{cm}$. **D.** $R=3,5\text{cm}$.

Câu 24. Cho tam giác ABC có $AB=3\sqrt{3}$, $BC=6\sqrt{3}$ và $CA=9$. Gọi D là trung điểm BC . Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

- A.** $R=\frac{9}{6}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=3\sqrt{3}$. **D.** $R=\frac{9}{2}$.

Câu 25. Tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A.** $r=1$. **B.** $r=2$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=2\sqrt{3}$.

Câu 26. Tam giác ABC có $a=21$, $b=17$, $c=10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A.** $r=16$. **B.** $r=7$. **C.** $r=\frac{7}{2}$. **D.** $r=8$.

Câu 27. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a .

- A.** $r=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $r=\frac{a\sqrt{2}}{5}$. **C.** $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $r=\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Câu 28. Tam giác ABC vuông tại A có $AB=6\text{cm}$, $BC=10\text{cm}$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A.** $r=1\text{cm}$. **B.** $r=\sqrt{2}\text{cm}$. **C.** $r=2\text{cm}$. **D.** $r=3\text{cm}$.

Câu 29. Tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB=a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A.** $r=\frac{a}{2}$. **B.** $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $r=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$. **D.** $r=\frac{a}{3}$.

Câu 30. Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

- A.** $1+\sqrt{2}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.